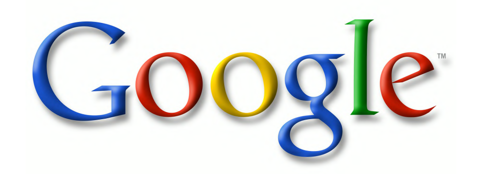
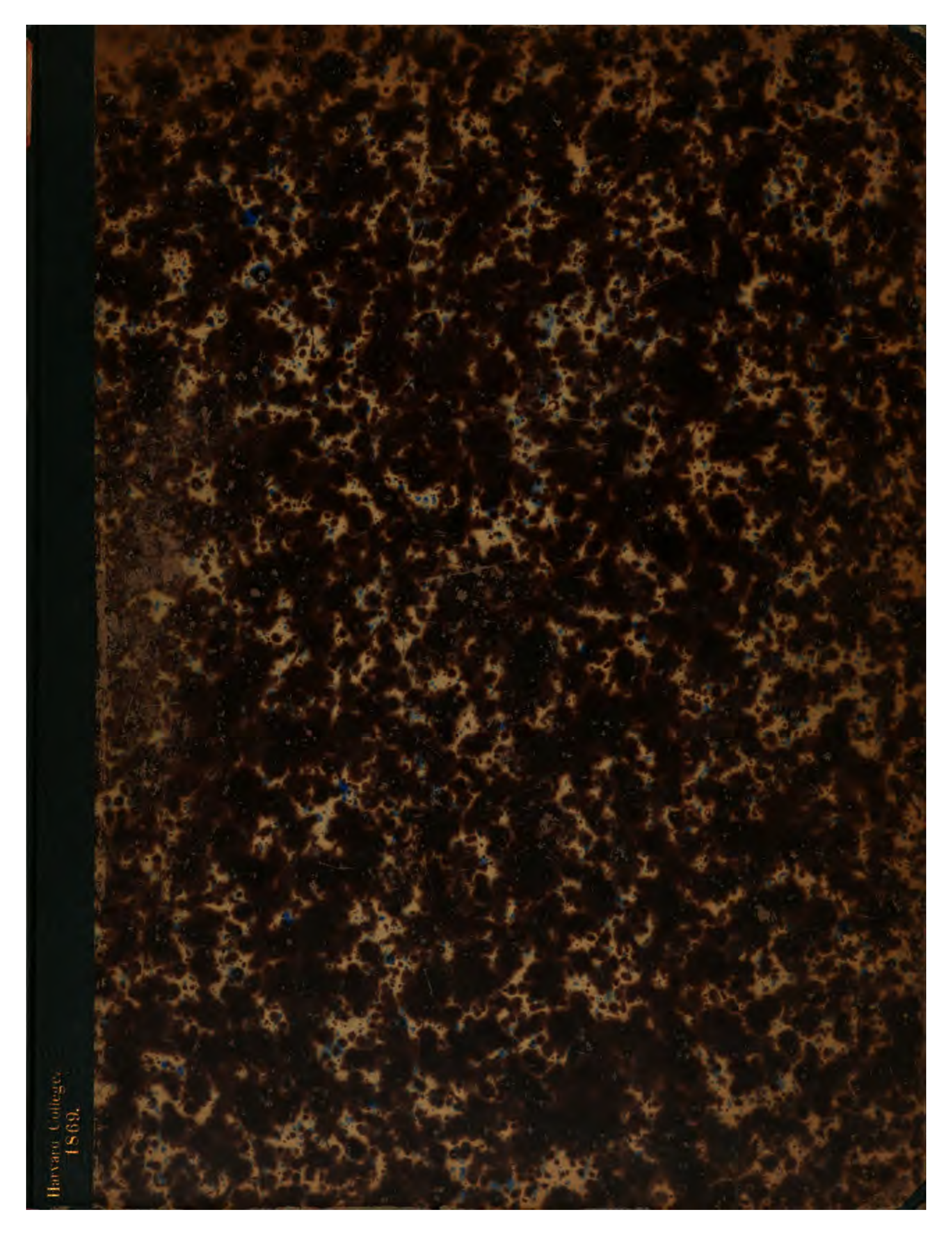



Harvard College.
1869.

[redacted]


SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
12 Jan. 1872.



ÜBER DIE BESTIMMUNG

VON

LÄNGEN-DIFFERENZEN

MIT HÜLFE

DES ELECTRISCHEN TELEGRAPHEN.

VON

D^R. THEODOR ALBRECHT,

ASSISTENT AM CENTRALBUREAU DER EUROPÄISCHEN GRADMESSUNG ZU BERLIN.

LEIPZIG,

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN.

1869.

1872, Jan. 12.
Farrar Fund.

VORREDE.

In den letzten Jahrzehnten ist bereits eine grössere Zahl telegraphischer Längenbestimmungen ausgeführt und ein reicher Schatz von Erfahrungen hierbei gesammelt worden, so dass es mir von Interesse schien, eine Zusammenstellung der wesentlichsten Wahrnehmungen dieser Art vorzunehmen und unter Berücksichtigung dieser Erfahrungen die verschiedenen Methoden der telegraphischen Längenbestimmung hinsichtlich ihrer leichten und bequemen Handhabung näher zu untersuchen. Ich habe versucht, in der vorliegenden Schrift eine solche Discussion zu liefern, und neben der Angabe der bequemsten und sichersten Verfahrungsweisen mein Bestreben besonders auch auf Untersuchung des Genauigkeitsgrades sowohl der astronomischen Zeitbestimmung und der resultirenden Längendifferenz, als auch der einzelnen Reductionselemente gerichtet, weil durch eine solche Betrachtung wesentliche Momente zur Beurtheilung der Güte der einzelnen Methoden erlangt werden. Zugleich schien mir erwünscht eine kurze Anleitung zur Ausführung und Berechnung der Längenbestimmungen zu geben, weil ich hoffe, dass eine solche gerade jetzt, wo eine grössere Zahl telegraphischer Längenbestimmungen zum Zwecke der europäischen Gradmessung ausgeführt werden, von einiger Bedeutung sein könnte.

Von diesen Gesichtspunkten aus bitte ich die vorliegende Schrift aufzufassen und ihr als einem Versuch auf diesem Gebiete eine milde Beurtheilung zu Theil werden zu lassen.

Nicht unterlassen kann ich, Sr. Excellenz Herrn Generallieutenant Dr. Baeyer für die bereitwillige Ueberlassung der Materialien des Centralbureaus, sowie meinen hochverehrten Lehrern, den Herren Professoren Dr. Bruhns und Dr. Foerster, für gütige Rathschläge bei Abfassung dieser Schrift meinen ergebensten Dank auszusprechen.

Leipzig, im August 1869.

Th. Albrecht.

INHALTSVERZEICHNISS.

EINLEITUNG.

Die telegraphische Längenbestimmung, als der vorzüglichsten Methode zur Längenbestimmung, soll in dieser Schrift eingehender behandelt werden; insbesondere soll eine Discussion aller Einzeloperationen dieses Verfahrens vorgenommen und darauf hingewiesen werden, in welcher Weise und bis zu welchem Grade man das Endresultat der geographischen Längendifferenz von den mannichfachen Einflüssen bekannter und unbekannter Fehlerquellen befreien kann.

Der Begriff Längenbestimmung lässt sich dahin präcisiren: Die Bestimmung des Längenunterschiedes zweier Punkte der Erdoberfläche ist die Ermittlung der Rectascensionsdifferenz ihrer Scheitelpunkte. Diese Aufgabe zerfällt ihrem Wesen nach in zwei Hauptabschnitte: 1) Bestimmung der Rectascension des Scheitelpunktes eines Ortes für einen gegebenen Zeitpunkt oder eine Reihe benachbarter Zeitmomente, und 2) Bestimmung des absoluten Zeitunterschiedes zweier gegebener Zeitpunkte verschiedener Oerter, oder Ermittlung ihrer Stellen in ein und derselben Zeitscala.

Der erste Abschnitt umfasst daher eine rein astronomische Aufgabe, während im zweiten die Ausführung elektromagnetischer Operationen in den Vordergrund tritt. Es möge hier zunächst auf den ersten Abschnitt, als dem rein astronomischen Theil der Operation, näher eingegangen werden.

Die Kenntniss der Rectascension des Zeniths, oder was dasselbe ist, die Kenntniss der Sternzeit, kann unmittelbar nur für den Moment erlangt werden, wo ein Stern von bekannter Rectascension das Zenith passirt; sie kann jedoch für ausgedehntere Zeitintervalle mit Hülfe eines Apparates gesichert werden, welcher die tägliche Bewegung dieses Punktes unter den Sternen insoweit genügend wiedergiebt, dass man aus einer augenblicklich bestimmten Rectascension diese Coordinate (die Sternzeit) auch für benachbarte Zeitpunkte ableiten kann.

Im Allgemeinen wird daher die Bestimmung der Rectascension des Zeniths am einfachsten in der Weise erfolgen können, dass man die Absehenslinie eines Fernrohrs mit Hülfe einer Reflexionsvorrichtung parallel der Lothlinie stellt und alsdann die Durchgangszeiten von

Sternen bekannter Rectascension durch diese Absehenslinie beobachtet. Diese Lösung der Aufgabe würde allerdings am directesten zum Ziele führen und auch den Vorzug grosser Einfachheit besitzen; es wird jedoch noch die Frage zu erörtern sein, ob dieselbe auch hinsichtlich der Bedingungen, eine möglichste Schnelligkeit der Operation zu gestatten und einen Maximalgrad von Sicherheit zu bieten, unter allen anderweitigen Verfahrungsweisen den ersten Rang einnimmt. In dieser Beziehung lehrt nun eine Betrachtung über das Wesen dieser Methode und die Natur der hier auftretenden Fehlerquellen, dass dies nicht der Fall ist; denn die Schnelligkeit der Operation erscheint sehr beeinträchtigt infolge des Umstandes, dass nur eine sehr geringe Anzahl von Sternen das Zenith oder dessen unmittelbare Nähe passirt; der Genauigkeitsgrad aber leidet darunter, dass für Sterne grösserer Declinationen, wie sie hierbei für unsere Breiten in Verwendung kommen würden, die Durchgangszeiten unsicherer bestimmt werden, als für Sterne in grösserer Nähe des Aequators.

Beide Umstände deuten darauf hin, dass dieses Verfahren trotz seiner Einfachheit nicht empfehlenswerth ist; sie lassen aber erkennen, dass eine andere Methode, welche nach Art der obigen Anschauungsweise als eine indirecte Bestimmung der Lage des Zeniths betrachtet werden kann, nämlich die Beobachtung der Durchgangszeiten von Aequatorialsternen unter Hinzuziehung von Polsternen behufs Bestimmung des Azimuths, weit weniger abhängig von diesen Beschränkungen ist, und dass sich daher dieses Verfahren zur Ausführung von Längenbestimmungen wesentlich mehr empfiehlt. Allerdings wird auch diese Methode nicht den vollen Genauigkeitsgrad verbürgen lassen, den man bei Beobachtung der Durchgangszeiten von Aequatorialsternen erreicht, insofern in dem Azimuth oder der Abweichung der Absehenslinie vom Meridian noch ein Element hinzutritt, welches gleichfalls eine gewisse Unsicherheit der Bestimmung in sich schliesst; aber selbst mit Rücksicht auf diese neu hinzutretende Fehlerquelle wird doch die letztere Methode einen grösseren Genauigkeitsgrad erlangen lassen, als die erstere, wie dies im weiteren Verlauf der Untersuchung durch Zahlwerthe begründet werden soll. Ausserdem besitzt sie darin einen unbedingten Vorzug vor jener Methode, dass sie hinsichtlich der Wahl der Sterne eine ungleich grössere Mannichfaltigkeit zulässt.

Wie nun auf Grund dieser Betrachtungen die Anordnung der Beobachtungen zu treffen sei und alle Fragen ähnlicher Art können erst später in Erörterung gezogen werden; für jetzt erscheint es nothwendig, eine Betrachtung der Einzeloperationen des Verfahrens, sowie eine Untersuchung der verschiedenartigen hier in Betracht kommenden Fehlerquellen vorzunehmen.

Abschnitt I.

Beobachtung der Fadendurchgänge.

Die Beobachtung der Fadendurchgänge bildet eine der Hauptoperationen des ganzen Verfahrens; schon bei dieser tritt eine Mannichfaltigkeit insofern auf, als dieselbe nach zwei wesentlich verschiedenen Methoden erfolgen kann. Sie kann geschehen entweder nach der Aug- und Ohrmethode, bei deren Anwendung der Beobachter die Epochen der gehörten Uhrschläge direct mit den gesehenen Abständen des Sternes vom Faden verbindet; oder nach der Aug- und Hand- auch Registrirmethode, wobei der Beobachter im Augenblick der Coincidenz von Stern und Faden einen Taster schliesst und hierdurch diesen Moment auf einen Registrirapparat mechanisch fixirt.

Bevor aber der Unterschied beider Methoden eingehender betrachtet, insbesondere die Vorzüge und Nachtheile jeder einzelnen specieller namhaft gemacht werden sollen, mögen einige Betrachtungen vorangehen, welche sich auf allgemeine Wahrnehmungen hinsichtlich der Beobachtungsfehler von Fadendurchgängen beziehen.

Wenn man ein Urtheil über die Grösse dieser Fehlerwerthe, sowie insbesondere über ihre gesetzmässige Aenderung unter verschiedenen äusseren Umständen, z. B. bei verschiedenen Declinationen der Sterne, erlangen will, so wird es vor allen darauf ankommen, diejenigen Ursachen kennen zu lernen, welche als Hauptmomente bei Entstehung dieser Fehler aufzufassen sind. Es wird nahe liegen, ein solches Hauptmoment in der Construction des Auges zu suchen und zwar speciell in der Unvollkommenheit desselben, Lichtreize, welche auf sehr benachbarte Stellen der Netzhaut fallen, noch als getrennte Erscheinungen aufzufassen. Ueberträgt man dies auf den vorliegenden Fall, so würde es sich dahin aussprechen, dass das Auge von dem Moment ab, wo der Stern sich dem Faden bis zu einer bestimmten kleinen Grösse genähert hat, bis zu dem Moment, wo die Entfernung des Sternes vom Faden diese kleine Grösse wieder überschreitet, die Coincidenz als vollendet ansieht, und es würde mit Rücksicht auf die grosse Verschiedenheit in der Bewegungsgeschwindigkeit von Sternen verschiedener Declinationen unmittelbar aus dieser Betrachtung hervorgehen, dass der Ausdruck für diese Fehlerursache von der Form ist:

$$b \sec \delta,$$

zugleich aber auch, dass die Constante b im umgekehrten Verhältniss zur Vergrösserungszahl des Fernrohrs steht. Der Ausdruck für den Beobachtungsfehler wird ferner aber noch eine Constante enthalten müssen, welche bei der Aug- uno Ohrmethode einem Fehler des Hörens entspricht, der unabhängig von der Schnelligkeit der Sternbewegung ist, und in analoger Weise bei der Registrirmethode der Summe aller Fehlerwirkungen, welche hervorgehen aus der Un-

sicherheit der Uebertragung der Willensthätigkeit nach den Muskeln der Hand, der veränderlichen Wirksamkeit der Apparate und den Ablesungsfehlern der registrirten Zeitmomente.

Neben diesen beiden Hauptursachen wird noch eine Reihe anderweitiger Einflüsse modificirend auf den Betrag der Beobachtungsfehler einwirken; man wird jedoch bei näherer Betrachtung über die Grösse des Einflusses dieser weiteren Fehlerquellen zu der Ueberzeugung gelangen, dass dieselben nur von secundärer Ordnung sind, wenn man die Beobachtungen nicht auf zu extreme Fälle ausdehnt. Um den Nachweis zu führen, dass man innerhalb desjenigen Umfanges der Beobachtungen, welcher bei Längenbestimmungen in Betracht kommt, vom Einfluss anderweitiger Fehlerursachen abstrahiren kann, seien hier noch diejenigen beiden Fehlerquellen erwähnt, welche nach den beiden genannten wohl noch den grössten Einfluss auf den Betrag der Beobachtungsfehler ausüben werden: dies ist die mit der Zenithdistanz besonders in der Nähe des Horizontes rasch zunehmende Unruhe der Bilder und ferner die grössere oder geringere Sicherheit der Beobachtung bei Sternen verschiedener Grössenklassen.

Was die durch die fortdauernden atmosphärischen Schwankungen hervorgerufene Unruhe der Bilder anlangt, so hat Pape [1] bei Discussion der Beobachtungsfehler einer umfangreichen Reihe von Registrirbeobachtungen, welche er am Meridiankreis in Altona ausgeführt, dieselbe dadurch in Berücksichtigung gezogen, dass er dem Ausdruck für den wahrscheinlichen Beobachtungsfehler ein drittes Glied von der Form:

$$c \sec \delta \operatorname{tang} z$$

hinzufügte. Pape erhielt auf diese Weise für den wahrscheinlichen Fehler eines Fadendurchganges nach der Registrirmethode folgenden Ausdruck:

1) $$\alpha = \sqrt{0^s\!.0460^2 + 0^s\!.01203 \sec^2 \delta + 0^s\!.01702^2 \sec^2 \delta \operatorname{tang}^2 z}$$

während er durch Verbindung der Beobachtungsfehler bei Aequatorialsternen mit denen des Polarsternes ohne Berücksichtigung eines von der Zenithdistanz abhängigen Gliedes den Ausdruck findet:

2) $$\alpha = \sqrt{0^s\!.0473^2 + 0^s\!.01788^2 \sec^2 \delta}\ .$$

Wenn nun über die Sicherheit entschieden werden soll, mit welcher jede dieser Formeln die unmittelbaren Beobachtungsresultate wiedergiebt, so wird man bei dieser Frage berücksichtigen müssen, dass einer Abweichung bei Sternen höherer Declination ein weit geringeres Gewicht zukommt, als einer eben so grossen Abweichung bei Aequatorialsternen, weil die wahrscheinlichen Fehler der Fadendurchgänge für Aequatorialsterne ihrer Kleinheit wegen weit sicherer bestimmt werden können, als die wahrscheinlichen Fehler für Polsterne. Aus diesem Grunde erschien es nothwendig, zunächst für die wirklich beobachteten wahrscheinlichen Fehler der Fadendurchgänge die wahrscheinliche Unsicherheit dieser Grössen nach der Formel:

$$s = \frac{0.4769}{\sqrt{m}\sqrt{n}}\, r$$

1 Pape, Astronomische Nachrichten. Band LIV. pag. 181—182.

worin r den wahrscheinlichen Fehler selbst, m die Zahl der Durchgänge und n die durchschnittliche Zahl der beobachteten Fäden innerhalb eines Durchganges bezeichnet, zu berechnen und aus diesen Werthen auf Grund der Relation:

$$p = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

das Gewicht jedes wahrscheinlichen Fehlers herzuleiten.

In welchem Grade sich die Ergebnisse der Formeln 1 und 2 an die unmittelbaren Beobachtungsresultate anschliessen, geht aus der folgenden Uebersichtstabelle hervor, welche sämmtliche von Pape zu diesem Zwecke beobachteten Sterne umfasst.

Stern	Declination	W. F.	Zahl der Durchg.	Zahl der Fäden	p.	Form. 1	R—B.	Form. 2	R—B.
α Can. maj. . . .	—16°32′	0ˢ052	6	161	26	0ˢ068	+0ˢ016	0ˢ051	—0ˢ001
α Virginis	—10 26	0.055	6	125	18	0.059	+0.004	0.051	—0.004
β Orionis.	— 8 22	0.052	6	153	25	0.057	+0.005	0.051	—0.001
α Hydrae.	— 8 3	0.056	6	151	21	0.057	+0.001	0.051	—0.005
α Aquarii.	— 1 0	0.047	3	81	16	0.053	+0.006	0.051	+0.004
α Can. min. . . .	+ 5 35	0.047	6	162	32	0.051	+0.004	0.051	+0.004
α Orionis.	+ 7 23	0.048	6	162	31	0.051	+0.003	0.051	+0.003
α Aquilae	+ 8 30	0.046	6	162	34	0.050	+0.004	0.051	+0.005
α Tauri	+16 13	0.046	6	162	34	0.050	+0.004	0.051	+0.005
α Bootis	+19 57	0.052	6	150	24	0.049	—0.003	0.051	—0.001
β Geminorum . .	+28 22	0.045	6	162	35	0.049	+0.004	0.051	+0.006
α Geminorum . .	+32 11	0.052	6	151	25	0.049	—0.003	0.052	0.000
α Lyrae	+38 39	0.052	7	169	27	0.049	—0.003	0.053	+0.001
α Aurigae	+44 51	0.051	7	163	28	0.049	—0.002	0.054	+0.003
α Urs. maj. . . .	+62 30	0.077	5	128	9.5	0.053	—0.024	0.061	—0.016
α Urs. maj. U. C.	+62 30	0.106	6	159	6.2	0.099	—0.007	0.061	—0.045
δ Urs. min. U. C.	+86 36.1	0.324	10	62	0.3	0.317	—0.007	0.305	—0.019
α Urs. min. U. C.	+88 33.8	0.715	29	215	0.2	0.715	0.000	0.715	0.000

Hiernach ergiebt sich für die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate bei Anwendung von

$$\text{Formel 1: } \Sigma p v v = 0.0172\,[1]$$
$$\text{» 2: } \qquad = 0.0203$$

und es zeigt sich, dass der Gewinn, den man durch Mitnahme des 3. Gliedes erreicht, nur von untergeordneter Bedeutung ist, insofern sich Formel 2 fast ebenso genau den Beobachtungsresultaten anschliesst als Formel 1. Es würde sogar aus der obigen Vergleichung hervorgehen, dass innerhalb der Grenzen von etwa 70° südlicher Zenithdistanz bis ca. 10° unterhalb des Poles Formel 2 noch besser den Beobachtungen entspricht als Formel 1; ein Resultat, welches darauf hindeutet, dass der Einfluss der von der Zenithdistanz abhängigen Unruhe der Bilder wenigstens innerhalb der hier angegebenen Grenzen als verschwindend zu betrachten ist.

---

1 Pape gelangt a. a. O. zu wesentlich anderen Resultaten aus dem Grunde, weil er die Gewichte der wahrscheinlichen Fehler durchgängig als gleich gross annimmt; doch kann diese Annahme nicht als richtig beeichnet werden.

Ein zweiter Umstand, der oben noch als am meisten einflussreich auf die Grösse der Beobachtungsfehler erwähnt war, betrifft die Helligkeit des Sternes; in der That wird fast jeder astronomische Beobachter das Gefühl empfinden, als sei bei Beobachtung hellerer Sterne eine grössere Unsicherheit vorhanden, als bei Sternen niedrigerer Grössenklassen. Doch scheint es, dass man innerhalb der Grenzen einer deutlichen Sichtbarkeit der Sterne auch diesen Einfluss vernachlässigen kann, da die Untersuchungen von Dunkin[1] kaum eine Bestätigung dieses dem Beobachter sich aufdrängenden Gefühles erkennen lassen. Dunkin leitet aus reichhaltigem Material von Beobachtungen am Great Transit Circle in Greenwich folgende Zahlwerthe ab:

I. Aug- und Ohrmethode.						
Grösse	Henry	Rogerson	Dunkin	Henderson	W. Ellis	Diverse
1	0ˢ103	0ˢ062	0ˢ058	0ˢ081	0ˢ074	0ˢ082
2	0.121	0.051	0.069	0.077	0.071	0.083
3	0.103	0.048	0.062	0.063	0.071	0.096
4	0.109	0.094	0.059	0.076	0.078	0.093
5	0.114	0.056	0.062	0.073	0.061	0.094
6	0.109	0.084	0.061	0.072	0.059	0.086

II. Registrirmethode.						
Grösse	Henry	Dunkin	W. Ellis	Criswick	Lynn	Diverse
1	0ˢ059	0ˢ049	0ˢ058	0ˢ048	0ˢ054	0ˢ056
2	0.059	0.046	0.051	0.044	0.054	0.055
3	0.058	0.047	0.057	0.049	0.052	0.055
4	0.059	0.053	0.053	0.047	0.053	0.059
5	0.054	0.047	0.051	0.046	0.050	0.057
6	0.055	0.049	0.049	0.052	0.048	0.072

Im Mittel findet Dunkin den wahrscheinlichen Fehler eines Fadendurchganges aus je 100 vollständigen Durchgängen:

Sterne	Aug- und Ohrmethode	Registrirmethode
1. Grösse	0ˢ074	0ˢ053
2. »	0.079	0.050
3. »	0.076	0.052
4. »	0.082	0.052
5. »	0.078	0.049
6. »	0.078	0.051

1 Monthly notices. Vol. XXIV. No. 7. 1864. Mai 13.

Aus der Gesammtheit dieser Betrachtungen scheint mit ziemlicher Sicherheit hervorzugehen, dass man innerhalb der für Längenbestimmungen gebotenen Grenzen die Formel:

$$\alpha = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{v}\right)^2 \sec^2 \delta}$$

worin v die Vergrösserungszahl des Fernrohres bedeutet, als wahren Ausdruck für die Grösse des wahrscheinlichen Fehlers eines Fadendurchganges betrachten kann.

Was die speciellen Zahlwerthe der Constanten in obiger Formel betrifft, so ist auf den oben citirten Aufsatz von Pape zu verweisen, in welchem sich in dieser Beziehung einiges Material gesammelt findet. Die daselbst gewonnenen Resultate sind nebst einigen vom Verfasser ausgerechneten Werthen[1] im folgenden Tableau zusammengestellt.

Beobachter	a	$\frac{b}{v}$	v	b	Bezeichnung des Instrumentes
	I. Aug- und Ohrmethode.				
Pape[2] . . .	0ˢ0847	0ˢ0197	180	3ˢ55	Meridiankreis in Altona.
Struve[3] . .	0.0744	0.0202	130	2.63	Dollond'sches Pass. instr. in Dorpat.
Struve[4] . .	0.0718	0.0157	178	2.79	Reichenbach'scher Kreis in Dorpat.
Argelander[5]	0.0625	0.0178	180	3.20	Reichenbach'scher Kreis in Abo.
Auwers[9]. .	0.0716	0.0275	126	3.47	Meridiankreis in Gotha.
Auwers[10] .	0.0653	0.0303	104	3.15	Liebherr'sches Pass. instr. in Leipzig.
Foerster[11].	0.0597	0.0366	88	3.22	Passageninstrument in Berlin.
	II. Registrirmethode.				
Pape[6] . . .	0ˢ0473	0ˢ0179	180	3ˢ22	Meridiankreis in Altona.
Pape[7] . . .	0.0528	0.0702	52	3.65	Universalinstrument von Pistor.
Peters[8] . .	0.0453	0.0675	44	2.97	Universalinstrument von Repsold.

Fasst man die einzelnen Ergebnisse zu Mittelwerthen zusammen, so erhält man:

Aug- und Ohrmethode: a = 0ˢ0700; b = 3ˢ14
Registrirmethode = 0.0485; 3.28

1 Bei der Bildung dieser Constanten ist im Allgemeinen das Princip befolgt worden, dieselben herzuleiten aus der Verbindung der Resultate von Aequatorsternen mit denen von Polsternen; wollte man die Werthe dieser Constanten lediglich aus Aequatorsternen bestimmen, so würde wegen des geringen Umfanges der Declinationen eine grosse Unsicherheit im Werthe b verbleiben.

2 Astronomische Nachrichten. Band LIV. pag. 183.

3 Walbeck, Berliner astronomisches Jahrbuch für 1823. pag. 186.

4 Observ. Dorpat. vol. IV. pag. XVI.

5 Astronomische Nachrichten. Band LIV. pag. 184.

6 Astronomische Nachrichten. Band LIV. pag. 184.

7 und 8 Peters, Ueber die Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen Altona und Schwerin. Altona 1861. pag. 217. Pape giebt Astronomische Nachrichten Band LIV. p. 185 gleichfalls hierfür Werthe an; doch sind die obigen der genannten Schrift entlehnten Werthe nach einer in derselben enthaltenen Notiz als die richtigeren zu betrachten.

9 und 10 Berechnet vom Verfasser auf Grundlage der Angaben in: Bruhns und Auwers, Bestimmung der Längendifferenz zwischen den Sternwarten zu Leipzig und Gotha. Leipzig 1865. pag. 83—84.

11 Berechnet vom Verfasser aus den Beobachtungen für die russische Längengradmessung im Jahre 1864.

Aus der Gesammtheit der einzelnen Werthe für b scheint hervorzugehen, dass hinsichtlich dieser Constanten zwischen beiden Methoden kein charakteristischer Unterschied besteht; es ist aus diesem Grunde vorgezogen worden, alle Angaben zu einem Mittelwerth:

$$b = 3^s\!.18 \pm 0^s\!.069$$

zu vereinigen.

Hingegen lässt der Gang der Werthe für die Constante a erkennen, dass dieselbe merklich verschieden ist je nach der Methode der Beobachtung der Fadendurchgänge; es zeigt sich, dass der Genauigkeitsgrad des Registrirens denjenigen der älteren Methode merklich übertrifft.

Der Zahlwerth dieser Constanten wird sich aber wegen seiner Verschiedenheit bei beiden Methoden aus der geringen Anzahl der oben angegebenen Werthe noch nicht mit Sicherheit ermitteln lassen; sobald aber nur der Werth für die Constante b feststeht — und dieser scheint aus den oben angegebenen Resultaten mit ziemlicher Sicherheit hervorzugehen — kann man leicht noch mehr Argumente zur Bestimmung des Werthes a erlangen, da man alsdann auch solches Material discutiren kann, welches nur Beobachtungen von Aequatorialsternen umfasst. Von diesem Gesichtspunkt ausgehend sind noch folgende Werthe für a abgeleitet worden:

Beobachter	Declination der beobachteten Sterne	W. F.	Vergrösserung	a	Bezeichnung des Instrumentes
	I. Aug- und Ohrmethode.				
Beobachter[1]	+20° bis +10°	0ˢ.082	140	0ˢ.0785	Great Transit Circle in Greenwich.
der	+10° bis 0°	0.073	140	0.0693	» » » » »
Greenwicher	0° bis —10°	0.070	140	0.0662	» » » » »
Sternwarte	—10° bis —20°	0.070	140	0.0659	» » » » »
	II. Registrirmethode.				
Beobachter[2]	+20° bis +10°	0ˢ.052	140	0ˢ.0464	Great Transit Circle in Greenwich.
der	+10° bis 0°	0.051	140	0.0456	» » » » »
Greenwicher	0° bis —10°	0.051	140	0.0456	» » » » »
Sternwarte	—10° bis —20°	0.050	140	0.0441	» » » » »
Hirsch[3] . .	— 9° bis +10°	0.0657	210	0.0639	Meridiankreis in Neufchatel.
Plantamour[4]	— 9° bis +10°	0.0657	105	0.0582	Meridiankreis in Genf.
Bruhns[5] . .	0° bis +27°	0.057	117	0.0495	Meridiankreis in Berlin.
Bruhns[6] . .	0° bis +27°	0.059	100	0.0488	Liebherr'sches Pass. instr. in Leipzig.
Foerster[7] . .	0° bis +27°	0.051	117	0.0424	Meridiankreis in Berlin.
Foerster[8] . .	0° bis +27°	0.078	100	0.0706	Liebherr'sches Pass. instr. in Leipzig.
Auwers[9] . .	—10° bis +16°	0.054	126	0.0475	Meridiankreis in Gotha.
Auwers[10] . .	—10° bis +16°	0.061	104	0.0525	Liebherr'sches Pass. instr. in Leipzig.

1 und 2 Dunkin, Monthly notices. vol. XX. No. 3. pag. 86.

3 und 4 Plantamour und Hirsch, Détermination télégraphique de la difference de longitude entre les observatoires de Genève et de Neuchâtel. Genève et Bale 1864. pag. 52.

5 bis 8 Bruhns und Foerster, Bestimmung der Längendifferenz zwischen den Sternwarten zu Berlin und Leipzig. Leipzig 1865. pag. 38.

9 und 10 Bruhns uud Auwers, Bestimmung der Längendifferenz zwischen den Sternwarten zu Leipzig und Gotha. Leipzig 1865. pag. 84—85.

Im Mittel findet sich daher für den Zahlwerth der Constante *a*

	Aug- und Ohrmethode		Registrirmethode	
bei directer Ableitung:	$0^{s}.0700$	7 Bestimmungen	$0^{s}.0485$	3 Bestimmungen
bei indirecter Ableitung:	0.0700	4 »	0.0513	12 »

Beiläufig sei darauf hingewiesen, dass aus der nahen Uebereinstimmung der auf directem und auf indirectem Wege abgeleiteten Resultate zugleich eine Bestätigung der Annahme des Werthes *b* hervorgeht.

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich der wahrscheinliche Fehler eines Fadendurchganges bei Anwendung

der Aug- und Ohrmethode: $\alpha = \sqrt{0^{s}.07^2 + \left(\frac{3^{s}.18}{v}\right)^2 \sec^2 \delta}$

der Registrirmethode: $\sqrt{0^{s}.05^2 + \left(\frac{3^{s}.18}{v}\right)^2 \sec^2 \delta}$

Zur grösseren Uebersichtlichkeit der bei verschiedenen Vergrösserungen und verschiedenen Declinationen zu erwartenden Beobachtungsfehler sind im Folgenden die wahrscheinlichen Fehler der Fadendurchgänge für einige specielle Werthe von *v* und *δ* berechnet und zwar enthält jedesmal die erste Reihe die unmittelbar der Beobachtung entsprechenden, im Bogen des Parallels gemessenen Fehler, die zweite aber dieselben Grössen verwandelt in Bogen grössten Kreises.

I. Aug- und Ohrmethode. $\alpha = \sqrt{0^{s}.07^2 + \left(\frac{3^{s}.18}{v}\right)^2 \sec^2 \delta}$

Declination	Vergrösserung													
	40		60		80		100		120		150		200	
0°	$0^{s}.106$	$1''.59$	$0^{s}.088$	$1''.32$	$0^{s}.080$	$1''.20$	$0^{s}.077$	$1''.16$	$0^{s}.075$	$1''.13$	$0^{s}.073$	$1''.10$	$0^{s}.072$	$1''.08$
10	0.107	1.58	0.088	1.30	0.081	1.20	0.077	1.14	0.075	1.11	0.073	1.08	0.072	1.06
20	0.110	1.55	0.090	1.27	0.082	1.16	0.078	1.10	0.075	1.06	0.074	1.04	0.072	1.01
30	0.115	1.49	0.093	1.21	0.084	1.09	0.079	1.03	0.076	0.99	0.074	0.96	0.072	0.94
40	0.125	1.44	0.098	1.13	0.087	1.00	0.081	0.93	0.078	0.90	0.075	0.86	0.073	0.84
50	0.142	1.37	0.108	1.04	0.093	0.90	0.086	0.83	0.081	0.78	0.077	0.74	0.074	0.71
60	0.174	1.30	0.127	0.95	0.106	0.80	0.095	0.71	0.088	0.66	0.082	0.62	0.077	0.58
70	0.243	1.25	0.170	0.87	0.136	0.70	0.116	0.60	0.104	0.53	0.093	0.48	0.084	0.43
80	0.463	1.21	0.313	0.82	0.239	0.62	0.196	0.51	0.168	0.44	0.141	0.37	0.115	0.30
82	0.575	1.20	0.387	0.81	0.294	0.61	0.239	0.50	0.203	0.42	0.168	0.35	0.134	0.28
84	0.764	1.20	0.512	0.80	0.387	0.61	0.312	0.49	0.263	0.41	0.215	0.34	0.167	0.26
86	1.14	1.19	0.763	0.80	0.574	0.60	0.461	0.48	0.386	0.40	0.312	0.33	0.238	0.25
88	2.28	1.19	1.52	0.80	1.14	0.60	0.913	0.48	0.762	0.40	0.611	0.32	0.461	0.24
88°40′	3.42	1.19	2.28	0.80	1.71	0.60	1.37	0.48	1.14	0.40	0.914	0.32	0.687	0.24

II. Registrirmethode. $\alpha = \sqrt{0{}^{s}\!.05^2 + \left(\frac{3{}^{s}\!.18}{v}\right)^2 \sec^2 \delta}$

Declination	Vergrösserung													
	40		60		80		100		120		150		200	
0°	0ˢ.094	1″.41	0ˢ.073	1″.10	0ˢ.064	0″.96	0ˢ.059	0″.89	0ˢ.057	0″.86	0ˢ.054	0″.81	0ˢ.052	0″.78
10	0.095	1.40	0.073	1.08	0.064	0.95	0.059	0.87	0.057	0.84	0.054	0.80	0.053	0.78
20	0.098	1.38	0.075	1.06	0.065	0.92	0.060	0.85	0.057	0.80	0.055	0.78	0.053	0.75
30	0.104	1.35	0.079	1.03	0.068	0.88	0.062	0.81	0.059	0.77	0.056	0.73	0.053	0.69
40	0.115	1.32	0.085	0.98	0.072	0.83	0.065	0.75	0.061	0.70	0.057	0.66	0.054	0.62
50	0.133	1.28	0.096	0.93	0.079	0.76	0.070	0.68	0.065	0.63	0.060	0.58	0.056	0.54
60	0.167	1.25	0.117	0.88	0.094	0.70	0.081	0.61	0.073	0.55	0.066	0.49	0.059	0.44
70	0.238	1.22	0.163	0.84	0.127	0.65	0.106	0.54	0.092	0.47	0.080	0.41	0.068	0.35
80	0.460	1.20	0.309	0.81	0.234	0.61	0.190	0.49	0.161	0.42	0.132	0.34	0.104	0.27
82	0.573	1.20	0.384	0.80	0.290	0.61	0.234	0.49	0.197	0.41	0.160	0.33	0.125	0.26
84	0.762	1.19	0.509	0.80	0.384	0.60	0.308	0.48	0.258	0.40	0.209	0.33	0.160	0.25
86	1.14	1.19	0.761	0.80	0.572	0.60	0.459	0.48	0.383	0.40	0.308	0.32	0.233	0.24
88	2.28	1.19	1.52	0.80	1.14	0.60	0.913	0.48	0.761	0.40	0.610	0.32	0.458	0.24
88°40′	3.42	1.19	2.28	0.80	1.71	0.60	1.37	0.48	1.14	0.40	0.912	0.32	0.685	0.24

Nimmt man zunächst blos auf die im Bogen des Parallels gemessenen wahrscheinlichen Fehler Rücksicht, so ergeben sich hinsichtlich des Genauigkeitsgrades der Fadendurchgänge folgende Sätze:

Bei Beobachtung von Aequatorialsternen liefert die Registrirmethode gegenüber der Aug- und Ohrmethode um so schärfere Resultate, je stärker die Vergrösserung ist. Es finden sich für die Gewichte der nach der Aug- und Ohrmethode beobachteten Fadendurchgänge im Vergleich zu den auf dem Wege der Registrirmethode erlangten Werthen den verschiedenen Vergrösserungen entsprechend folgende Verhältnisse:

Vergrösserung 40: 1 : 1.3
60: 1 : 1.5
100: 1 : 1.7
200: 1 : 1.9

Dagegen ergeben beide Methoden für Beobachtung von Polsternen gleichen Genauigkeitsgrad; es verhalten sich in diesem Falle die wahrscheinlichen Fehler nahezu umgekehrt proportional den Vergrösserungen. Ferner zeigt sich, dass der Zuwachs an Genauigkeit durch Vermehrung der Vergrösserung, ebenso wie die Verringerung derselben bei zunehmender Declination der Sterne, von erheblich grösserem Einfluss ist bei schwächeren Vergrösserungen, als bei stärkeren.

Betrachtet man aber die wahrscheinlichen Fehler der Fadendurchgänge im Bogen grössten Kreises ausgedrückt, so zeigt sich, dass sich dieselben bei zunehmender Declination der Sterne verringern, und zwar in um so beträchtlicherem Maasse, je stärker die Vergrösserung ist.

Nach Erledigung dieser Discussion erscheint es nothwendig, über den Genauigkeitsgrad der beiden Methoden, sowie überhaupt über die Vorzüge und Nachtheile jeder derselben einige

Worte hinzuzufügen. Was zunächst die Aug- und Ohrmethode anlangt, so ist ein besonders wichtiger Vorzug derselben darin zu suchen, dass sie die Anwendung und Ueberwachung mehr oder minder complicirter Apparate entbehrlich macht und daher leichter in Ausführung gebracht werden kann; doch steht diesem die Wahrnehmung gegenüber, dass man mit Hülfe dieser Methode nicht denjenigen Genauigkeitsgrad erlangt, den man bei gleicher Zahl der Fäden auf dem Wege der anderen Methode erhält. Die Registrirmethode hingegen setzt allerdings einen ziemlichen Apparat mechanischer Vorrichtungen voraus; aber es ist sicher, dass man alle Fehlerquellen, welche aus der Complicirtheit der Apparate hervorgehen, also z. B. die verschiedene Trägheit der Elektromagnete, die unregelmässige Bewegung des Registrirapparates, die veränderliche Intensität des elektrischen Stromes, ferner auch die Unsicherheit der Ablesung, nicht eigentlich als Nachtheile dieser Methode bezeichnen kann, da die praktische Ausführung derselben ergiebt, dass man ohne grossen Aufwand an Zeit und Mühe die Gesammtwirkung aller dieser Fehlerursachen auf 0ˢ01 bis 0ˢ02 reduciren kann, wofür unter Andern die wahrscheinlichen Fehler der Uhrvergleichung, welche bei Gelegenheit der Längenbestimmung Göttingen-Leiden erhalten wurden und im Abschnitt VI dieser Schrift aufgeführt sind, als Belege dienen können. Diese Methode gewährt ferner einen grösseren Genauigkeitsgrad, und zwar nicht allein deshalb, weil hierbei die wahrscheinlichen Fehler der Fadendurchgänge erheblich verkleinert erscheinen, sondern auch aus dem Grunde, weil man bei Anwendung derselben die Fäden in beträchtlich engeren Intervallen annehmen und auf diese Weise in ein und derselben Zeit eine weit grössere Zahl von Fäden beobachten kann; doch wird dieser letztere Vortheil eine Beeinträchtigung insofern erfahren, als bei Anwendung der Registrirmethode ein weiterer Zeitaufwand zum Ablesen der registrirten Zeitmomente erforderlich ist. Es scheint, dass bei Anwendung der Registrirmethode auch eine etwas grössere Constanz der persönlichen Gleichung vorhanden sei; doch sind Beispiele genug vorhanden, welche die Existenz grosser Schwankungen im Betrage derselben auch in diesem Falle ausser Zweifel stellen.[1]

Die Gesammtheit dieser Betrachtungen deutet darauf hin, dass die Anwendung der Registrirmethode für die Zwecke telegraphischer Längenbestimmungen sich mehr empfiehlt, als die Ausführung der Aug- und Ohrmethode; doch wird man auch dieser ihre volle Berechtigung insofern zuerkennen müssen, als sie, neben der anderen Methode angewandt, mit Rücksicht auf die ziemlich abweichende Beobachtungsart eine sehr werthvolle Controle liefert.

Eine weitere Frage ist diejenige, ob man bei Anwendung der Registrirmethode dieselbe auch auf die Beobachtung von Polsternen ausdehnen soll. Es muss allerdings zugegeben werden, dass, wenn man dieser Bedingung nicht Genüge leistet, und die Polsterne nach der Aug- und Ohrmethode beobachtet, in gewissem Grade eine Zusammenfassung heterogener Elemente stattfindet; aber es kann auch im Falle der Registrirung der Polsterndurchgänge nicht erwartet werden, dass man das Resultat frei von noch anderweit hinzutretenden Fehlerursachen erhielte. Einestheils werden dieselben daraus hervorgehen, dass bei den Polsternen die ganze Erscheinung des Fadendurchganges wegen der weit langsameren Bewegung des Sternes ziemlich ver-

---

1 Vergl. pag. 17.

schieden ist vom Durchgang eines Aequatorsternes; anderntheils wird aber vor allen der Umstand, dass infolge Unruhe des Bildes oftmals eine sehr lange, ein anderes Mal aber wieder nur eine augenblickliche Coincidenz des Sternes mit dem Faden eintritt, die Gefahr constanter Verzögerungen gegenüber den Registrirungen rascher bewegter Sterne hervorrufen. Wegen dieses Umstandes, sowie mit Rücksicht darauf, dass für Polsterne beide Methoden gleichen Genauigkeitsgrad zeigen, wird die Zusammenfassung registrirter Zeitsterne mit den nach Aug und Ohr beobachteten Polsternen nicht allein zulässig erscheinen, sondern auch in Bezug auf Zeitaufwand und Sicherheit des Resultates den Vorzug vor anderen Verfahrungsweisen verdienen.

Was die specielle Construction der Apparate anlangt, welche bei Ausführung von Registrirbeobachtungen in Anwendung kommen, so möge hier der Hinweis auf einige Stellen genügen, an welchen detaillirte Beschreibungen derselben zu finden sind:

Streifenapparate: Locke, Silliman Journal (2) Band VI, pag. 216; Band VII, pag. 231.

Hansen, Berichte der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften. Band XI. pag. 248.

Plantamour und Hirsch, Détermination télégraphique etc. Genève et Bale. 1864. pag. 21.

Cylinderapparate: Lamont, Münchener akademische Abhandlungen der math. physik. Classe. Band VI. Abth. 2. pag. 414.

Greenwich Observations 1856. Appendix: Description of the galvanic chronographic apparatus.

Peters, Astronomische Nachrichten. Band XLIX. pag. 1.

Peters, Ueber die Bestimmung des Längenunterschiedes etc. Altona 1861. pag. 240.

Plantamour und Hirsch, Détermination télégraphique etc. Genève et Bale. 1864. pag. 18.

Unterbrecher: Nach Lamont: Münchener akademische Abhandlungen der math. physik. Classe. Band VI. Abth. 2. pag. 416. 420.

Nach Krille: Peters, Astronomische Nachrichten. Band XLIX. pag. 8.

Peters, Ueber die Bestimmung des Längenunterschiedes etc. Altona 1861. pag. 244.

Nach Hansen: Bruhns und Auwers, Bestimmung der Längendifferenz zwischen den Sternwarten zu Leipzig und Gotha. Leipzig 1865. pag. 10.

Abschnitt II.

Persönliche Fehler.

Nachdem im ganzen Verlauf der bisherigen Untersuchung eine Reihe von Fehlerquellen erörtert, welche bei Beobachtung von Fadendurchgängen die Sicherheit der Resultate beeinflussen, ist nun noch eine weitere Fehlerursache zu betrachten, welche erheblich modificirend auf den Genauigkeitsgrad der Sterndurchgänge einwirkt, insbesondere wenn es sich darum handelt, die Resultate zweier verschiedener Beobachter mit einander zu verbinden: es sind dies die persönlichen Fehler. Bisher waren dieselben nicht in directer Weise zugänglich gewesen; man hatte sich deshalb begnügt, die Differenz zwischen den persönlichen Fehlern zweier Beobachter: die sogenannte persönliche Gleichung zu ermitteln und dieselbe als Correctionsgrösse an die Beobachtungsresultate anzubringen. In neuerer Zeit ist aber auf dem Wege der Erforschung dieser Fehlerquellen insofern ein wichtiger Schritt geschehen, als man selbst registrirende Apparate, sogenannte Zeitcollimatoren, construirt hat, welche die Erscheinung der Sterndurchgänge nachahmen, und ein Mittel an die Hand geben, auch die absoluten persönlichen Fehler zu bestimmen. Apparate dieser Art sind angegeben worden von:

1) Prazmowski: Cosmos. vol. IV. pag. 445.

2) Hirsch: Bulletins de Neuchâtel. tome VI. cah. I. pag. 110.
Détermination télégraphique de la différence de longitude entre les observatoires de Genève et de Neuchâtel par Plantamour und Hirsch. Genève et Bale 1864. pag. 93—95.

3) Hartmann: Archiv der Mathematik und Physik von Grunert. Band XXXI. pag. 3.
Auszug: Astronomische Nachrichten. Band LXV. pag. 130.

4) Wolf: Annales de l'observatoire impérial de Paris. tome VIII. pag. 153-208.
Recherches sur l'équation personelle dans les observations de passages, sa détermination absolue, ses lois et son origine. Paris 1865.

5) Kaiser: Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. 1863. T. 15. pag. 173—220.
Sur la détermination absolue de l'erreur personelle dans les observations astronomiques. Amsterdam 1863.

6) Kaiser: Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Afdeeling Natuurkunde. Reeks II. Deel II.
Ueber einen neuen Apparat zur absoluten Bestimmung von persönlichen Fehlern bei astronomischen Beobachtungen. Amsterdam 1867.

7) Foerster: Noch nicht publicirt.

Das allgemeine Princip, welches allen diesen Apparaten zu Grunde liegt, besteht im Wesentlichen darin, dass sich ein künstlicher Stern über einen Faden hinwegbewegt, und dass hierbei der Moment der wirklichen Coincidenz des Sternes und Fadens mechanisch auf einem Registrirapparat verzeichnet wird, während der Beobachter diese Coincidenz wie bei einem gewöhnlichen Sterndurchgang beobachtet und durch Vergleichung dieser Zeitmomente sofort den Betrag des absoluten persönlichen Fehlers erhält. Um auf diesem Wege Resultate zu erlangen, welche mit denen natürlicher Sterndurchgänge in Einklang stehen, wird man besondere Sorgfalt darauf verwenden müssen, dass die ganze Erscheinung so getreu als möglich einen natürlichen Sterndurchgang nachahmt; man wird also besonders auch darauf achten müssen, dass die Dimensionen für den Durchmesser des Sternes und die Dicke der Fäden, sowie die Geschwindigkeit der Bewegung des Sternes der Erscheinung natürlicher Sterndurchgänge vollständig entsprechen. Am bequemsten ist es von einer bestimmten Geschwindigkeit in der Bewegung des künstlichen Sternes auszugehen; bezeichnet man den linearen Werth des vom Stern in einer Secunde auf der Fadenplatte zurückgelegten Weges mit l, so findet man zunächst für die Entfernung des Auges von der Fadenplatte, welche erforderlich ist, um diese Strecke genau unter demjenigen Winkel zu sehen, unter welchem die Bewegung eines Sternes von der Declination δ innerhalb einer Zeitsekunde in einem Fernrohre von $v$facher Vergrösserung erscheint, den Ausdruck:

$$e = \frac{1}{15 \sin 1''} \cdot \frac{l}{v} \cdot \sec \delta$$

Ist ferner f die Brennweite des Fernrohres, Δ aber der Winkelwerth der Fadenbreite in einem Fernrohr von 1 Meter Brennweite, so wird mit Rücksicht darauf, dass die Winkeldicke des Fadens im umgekehrten Verhältniss zur Brennweite des Fernrohres steht, die lineare Fadenbreite aus der Relation hervorgehen:

$$b = \frac{l}{15} \cdot \frac{\Delta}{f} \cdot \sec \delta$$

wobei f in Metern und Δ in Bogensecunden ausgedrückt ist. Was den Durchmesser des Sternes anlangt, so wird es genügen, denselben gleich der doppelten Fadenbreite zu setzen.

Sobald man nun auf alle diese Verhältnisse Rücksicht genommen hat, wird man auch erwarten können, dass die an einem solchen Apparat erlangten Resultate übereinstimmen mit denen, welche aus natürlichen Sterndurchgängen hervorgehen. In wie weit diese Voraussetzung erfüllt ist, kann man aus den nachfolgenden Beobachtungsreihen ersehen:

Albrecht — v. Hennekeler.				
1867	Kr. West		Kr. Ost	
	Sterne	Apparat	Sterne	Apparat
Juni 5.		—$0\overset{s}{.}04$		—$0\overset{s}{.}03$
6.	—$0\overset{s}{.}06$	—0.01	—$0\overset{s}{.}07$	—0.03
7.	+0.01	—0.06	—0.05	—0.03
8.		—0.03		—0.05
9.	+0.03	—0.07	—0.04	—0.11
—	—0.05		—0.04	
11.	—0.04		0.00	
—	0.00		—0.04	
12.		—0.03		—0.05
13.	—0.03	—0.04	0.00	—0.07
15.		—0.06		—0.07
	—0.020	—0.042	—0.034	—0.055

Albrecht — Kam.				
1867	Kr. West		Kr. Ost	
	Sterne	Apparat	Sterne	Apparat
Juni 5.		—$0\overset{s}{.}02$		—$0\overset{s}{.}04$
6.	—$0\overset{s}{.}03$	0.00	—$0\overset{s}{.}05$	—0.06
7.		—0.04	—0.05	—0.05
8.		—0.01		—0.04
9.	—0.08	—0.05	—0.05	—0.02
10.	+0.01	—0.06	—0.14	—0.07
11.	+0.01	—0.04	—0.01	
—	—0.07		—0.04	
12.		—0.05		—0.04
13.		—0.06		—0.07
14.	—0.04		—0.08	
15.		—0.05		—0.05
	—0.033	—0.038	—0.060	—0.049

Plantamour — Hirsch.		
	Sterne	Apparat
1861. Mai 23.	+$0\overset{s}{.}08$	
Oct. 16.	+0.24	
—	+0.18	
1862. April 26.	+0.11	
—	+0.12	
—	+0.13	
Nov. 4.		+$0\overset{s}{.}14$
—		+0.05
—		+0.09
Nov. 5.		+0.13
—		+0.13
	+0.143	+0.108

Albrecht — Valentiner.		
1867	Sterne	Apparat
Juli 6.		—$0\overset{s}{.}07$
8.		—0.04
9.		—0.04
10.		+0.05
12.		+0.01
13.	$0\overset{s}{.}00$	
14.	—0.03	
15.	—0.03	—0.07
16.	+0.01	—0.01
17.		—0.01
18.		—0.04
Nov. 9.	—0.01	
12.	—0.04	
27.	+0.04	
30.		+0.03
Dec. 2.		+0.04
3.		+0.06
4.		+0.02
	—0.009	—0.005

Valentiner — Bäcklund.		
1868	Sterne	Apparat
Juni 24.		—$0\overset{s}{.}02$
25.		—0.02
26.	—$0\overset{s}{.}01$	—0.02
27.	+0.01	+0.04
28.	—0.04	
30.	+0.02	+0.01
Juli 1.		—0.01
	—0.005	—0.003

Valentiner — Tietjen.		
1867	Sterne	Apparat
Juli 9.		—$0\overset{s}{.}10$
10.		—0.19
12.		—0.12
13.	—$0\overset{s}{.}16$	
15.	—0.18	—0.15
16.		—0.14
17.		—0.16
18.		—0.13
	—0.17	—0.14

Aus diesen Werthen ergeben sich folgende Abweichungen im Sinne: Stern-Apparat:

Albrecht — v. Hennekeler:	+ 0^{s}022 und + 0^{s}021
Albrecht — N. M. Kam:	+ 0.005 und — 0.011
Plantamour — Hirsch:	+ 0^{s}035
Albrecht — Valentiner:	— 0.004
Valentiner — Tietjen:	— 0.03
Valentiner — Bäcklund:	— 0.002

welche Werthe wohl sämmtlich als innerhalb der Beobachtungsfehler fallend betrachtet werden können.

Nachdem somit die Berechtigung nachgewiesen ist, die an einem solchen Apparat erhaltenen Resultate unmittelbar identificiren zu können mit denen, welche aus natürlichen Sterndurchgängen hervorgehen, soll im weiteren Verlauf dieser Untersuchung auch auf diejenigen Resultate Rücksicht genommen werden, welche aus Beobachtungen an Zeitcollimatoren erhalten wurden.

Was die Grösse der persönlichen Gleichung im Allgemeinen betrifft, so sind zur Zeit als Maximalwerthe folgende zu bezeichnen:

Bessel[1] — Argelander:	— 1^{s}22	im Jahre 1820
Bessel — Walbeck:	— 1.04	» » 1820
Bessel — Struve:	— 1.02	» » 1823,5
Dunkin[2] — W. Ellis:	+ 0.84	» » 1847
Gerling[3] — Nicolai:	+ 0.78	» » 1837
etc.	etc.	

Ferner pflegt die persönliche Gleichung charakteristische Unterschiede zu zeigen je nach der Methode, nach welcher die Beobachtung der Fadendurchgänge geschehen ist. Beispiele hierfür sind:

	Aug- und Ohrmethode	Registrirmethode
1. Persönliche Gleichung: Dunkin[4] — Breen . . .	—0^{s}14	+0^{s}09
Dunkin — Henderson .	—0.13	+0.06
Dunkin — Henry . . .	—0.17	+0.01
Faye — Taylor . . .	—0.23	—0.07
2. Absolute persönliche Fehler: N. M. Kam[5] . . .	+0.16	—0.03
v. Hennekeler . .	+0.12	—0.08

1 Bessel, Astronomische Beobachtungen in Königsberg. Königsberg Abth. VIII. pag. V—VI.
2 Greenwich Observations for the year 1847. pag. LVIII.
3 Astronomische Nachrichten. Band XV. pag. 261.
4 Greenwich Observations for the year 1854. pag. XXXIX, XLVIII.
5 Kaiser, Ueber einen neuen Apparat zur Bestimmung etc. 14—16. Beobachtungsreihen *C, D, F, G*.

Eine weitere Wahrnehmung hinsichtlich der persönlichen Gleichung betrifft die mehr oder minder erhebliche Constanz derselben, welche aus den nachfolgenden Zusammenstellungen zu ersehen ist.

I. Aug- und Ohrmethode.[1]

Jahr	Main — Rogerson	W. Ellis — Rogerson	Henderson — Rogerson	Main — Henry	H. Breen — Henry
1840	$-0^{s}.15$				
1841	+0.08			$-0^{s}.09$	
1842				—0.01	
1843	+0.20			—0.02	
1844	+0.18			—0.05	
1845	+0.20			—0.12	
1846	+0.26	$-0^{s}.11$		—0.05	$-0^{s}.14$
1847	+0.35	—0.22		—0.03	+0.04
1848	+0.37		$+0^{s}.28$	—0.04	0.00
1849	+0.39	+0.12	+0.28	—0.05	—0.08
1850	+0.45	+0.45	+0.22	—0.11	
1851	+0.47	+0.36	+0.19	—0.11	+0.08
1852	+0.63	+0.44	+0.23	0.00	+0.03
1853	+0.70	+0.62	+0.44	+0.03	—0.03
1854					—0.03

II. Registrirmethode.

Jahr	Lynn — Dunkin	Lynn — T. Ellis	Criswick — Dunkin	T. Ellis — Dunkin	Criswick — Carpenter
1854	$-0^{s}.05$	$-0^{s}.04$		$-0^{s}.01$	
1855	+0.05	+0.08	$+0^{s}.03$	—0.03	
1856	+0.09	+0.13	+0.10	—0.04	$+0^{s}.10$
1857	+0.18	+0.32	+0.10	—0.14	+0.11
1858	+0.21	+0.35	+0.08	—0.14	+0.08
1859	+0.27	+0.36	+0.13	—0.09	+0.03
1860	+0.31	+0.40	+0.14	—0.09	+0.01
1861	+0.35	+0.48	+0.15	—0.13	+0.06
1862	+0.21	+0.36	+0.15	—0.15	+0.07
1863	+0.29	+0.45	+0.16	—0.16	+0.09
1864	+0.30	+0.47	+0.12	—0.17	+0.02
1865	+0.24	+0.39	+0.13	—0.15	+0.04
1866	+0.27	+0.43	+0.12	—0.16	+0.04

Unter den Factoren, welche modificirend auf den Betrag der persönlichen Gleichung einwirken, steht in erster Linie der Einfluss der **Vergrösserung**, sowie derjenige, welcher aus der **verschiedenen Bewegungsgeschwindigkeit der Sterne** infolge verschiedener Declination hervorgeht. Beide Factoren können hinsichtlich ihres Einflusses auf die persönliche Gleichung als identisch betrachtet werden, da auch die wechselnde Vergrösserung sich wesentlich nur in einer verschiedenen Bewegungsgeschwindigkeit der Sterne ausspricht, und der kleine Unterschied, dass die Vergrösserung auch die Dicke der Fäden ändert, als nur von secundärer Ordnung betrachtet werden kann. Das Material für die reine Wirkung der Vergrösserung beschränkt sich auf die Angabe von Bessel, dass er bei seinen Beobachtungen mindestens für Aequatorialsterne innerhalb der Vergrösserungen 66 bis 182 einen Unterschied nicht bemerkt habe, und auf mehrere Versuchsreihen an Zeitcollimatoren, welche Folgendes ergeben:

I. Aug- und Ohrmethode.

	Wolf[2]
Verg. 34	$+0^{s}.163$
43	+0.151
77	+0.111
133	+0.104

	F. Kaiser[3]	P. J. Kaiser	N. M. Kam	v. Hennekeler
Verg. 50	$-0^{s}.094$	$+0^{s}.032$	$+0^{s}.188$	$+0^{s}.055$
200	—0.141	+0.018	+0.160	+0.125

1 Für 1840—1845: Peters, Ueber die Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen Altona und Schwerin. Altona 1861. pag. 256. — Für 1846—1866: Greenwich Observations for the years 1846—1866.

2 Annales de l'Observatoire impérial de Paris. tome VIII. pag. 182.

3 Kaiser, Ueber einen neuen Apparat etc. pag. 13—16. Beobachtungsreihe: *A*, *C*, *F*.

II. Registrirmethode.

	F. Kaiser[1]	P. J. Kaiser	N. M. Kam	v. Hennekeler
Vergr. 50	—0ˢ094	—0ˢ096	+0ˢ028	—0ˢ074
200	—0.067	—0.051	—0.029	—0.082

Hingegen finden sich für den Einfluss einer Aenderung in der Bewegungsgeschwindigkeit der Sterne folgende Zahlwerthe:

Bruhns — Auwers.[2] Aug- und Ohrmethode.

1865. Octbr. 2. Mittl. Declin. + 2°3:	+0ˢ138	1865. Octbr. 3. Mittl. Declin. + 0°3:	+0ˢ285
+18.0:	+0.169	+24.4:	+0.184
+47.0:	+0.014	+47.3:	+0.109

Pape — Peters.[3]

	Aug- und Ohrmethode	Registrirmethode
Aequatorialsterne	—0ˢ108	—0ˢ140
Polarstern	—0.020	—0.333

Wolf.[4] Aug- und Ohrmethode.

Geschwindigkeit 1,9:	+0ˢ141
1,5:	+0.120
1,1:	+0.108
0,7:	+0.091

Man ersieht aus der Gesammtheit dieser Zahlwerthe, dass die verschiedene Bewegungsgeschwindigkeit der Sterne und somit auch die verschiedene Vergrösserung bei einzelnen Beobachtern einen ziemlich erheblichen Einfluss auf den Betrag der persönlichen Gleichung ausübt.

Ein weiterer Factor, von welchem die Grösse der persönlichen Gleichung abhängt, ist die Bewegungsrichtung der Sterne; in dieser Beziehung seien zunächst einige Versuchsreihen an Zeitcollimatoren aufgeführt, weil zu erwarten steht, dass dieselben die Unterschiede, welche aus dem Wechsel der Bewegungsrichtungen hervorgehen, deutlicher werden erkennen

1 Kaiser, Ueber einen neuen Apparat etc. pag. 13—16. Beobachtungsreihe: *B, D, G.*

2 Bruhns und Auwers, Bestimmung der Längendifferenz zwischen den Sternwarten zu Leipzig und Gotha. Leipzig 1865. pag. 81—82.

3 Astronomische Nachrichten. Band LIV. pag. 187.

4 Annales de l'Observatoire impérial de Paris. tome VIII. pag. 178.

lassen, als die natürlichen Sterndurchgänge, insofern bei diesen noch eine Reihe anderweitiger Einflüsse mitwirken.

1) Bewegungsrichtung horizontal.

Wolf.[1] Aug- und Ohrmethode.

1864	Von rechts nach links	Von links nach rechts	Differenz
Mai 11.	+0^{s}08	+0^{s}17	+0^{s}09
12.	+0.11	+0.12	+0.01
—	+0.09	+0.16	+0.07
—	+0.13	+0.15	+0.02
Juni 2.	+0.12	+0.18	+0.06
8.	+0.11	+0.12	+0.01
—	+0.10	+0.15	+0.05
—	+0.10	+0.14	+0.04
Juli 16.	+0.09	+0.13	+0.04
23.	+0.08	+0.13	+0.05
—	+0.09	+0.13	+0.04

Registrirmethode.

Beobachter	Von rechts nach links	Von links nach rechts	Differenz
F. Kaiser[2]. . .	—0^{s}07	—0^{s}07	0^{s}00
P. J. Kaiser. .	—0.05	—0.07	—0.02
N. M. Kam . .	—0.03	—0.03	0.00
v. Hennekeler.	—0.08	—0.03	+0.05

2) Bewegungsrichtung vertical.

Registrirmethode.

1867	F. Kaiser[3]			P. J. Kaiser			N. M. Kam			v. Hennekeler.		
	von oben	von unten	Differenz	von oben	von unten	Differenz	von oben	von unten	Differenz	von oben	von unten	Differenz
März 13.	—0^{s}06	—0^{s}08	+0^{s}02	—0^{s}05	—0^{s}04	—0^{s}01	—0^{s}05	—0^{s}04	—0^{s}01	—0^{s}08	—0^{s}05	—0^{s}03
14.	—0.07	—0.07	0.00	—0.03	—0.03	0.00	—0.04	—0.05	+0.01	—0.06	—0.05	—0.01
15.	—0.05	—0.06	+0.01	—0.03	—0.02	—0.01	—0.02	—0.03	+0.01	—0.06	—0.09	+0.03
16.	—0.08	—0.06	—0.02	—0.02	—0.03	+0.01	—0.04	—0.04	0.00	—0.07	—0.08	+0.01
18.	—0.07	—0.06	—0.01	—0.03	—0.03	0.00	—0.05	—0.06	+0.01	—0.08	—0.05	—0.03

1 Annales de l'Observatoire impérial de Paris. tome VIII. pag. 174.
2 Kaiser, Ueber einen neuen Apparat etc. pag. 20.
3 Kaiser, Ueber einen neuen Apparat etc. pag. 20. Beobachtungsreihe *H*.

3) Nachahmung der West- und Ostlage im gebrochenen Fernrohr. Die Bewegung des Sternes ist hierbei stets von links nach rechts und zwar unter 45⁰ Neigung von unten nach oben entsprechend der Westlage, und unter gleicher Neigung von oben nach unten entsprechend der Ostlage.

West — Ost. Registrirmethode.

Am Apparat sub 6 in Leiden.						Am Apparat sub 7 in Berlin.					
N. M. Kam		v. Hennekeler		Albrecht		Tietjen		Valentiner		Albrecht	
Juni 5.	—0ˢ01	Juni 5.	—0ˢ07	Juni 5.	—0ˢ01	Juli 5.	+0ˢ02	Juli 6.	—0ˢ06	Juli 6.	0ˢ00
—	+0.03	—	—0.01	—	—0.05	9.	+0.04	8.	+0.06	8.	+0.01
—	—0.03	6.	—0.02	—	—0.02	10.	—0.01	9.	+0.04	9.	—0.04
6.	+0.03	—	+0.01	6.	—0.02	12.	—0.04	10.	—0.06	10.	0.00
—	+0.03	7.	—0.04	7.	—0.02	15.	—0.04	12.	—0.02	12.	+0.02
7.	—0.01	—	—0.06	—	—0.03	16.	0.00	15.	—0.06	15.	—0.01
—	—0.02	8.	—0.02	8.	—0.04	17.	+0.01	16.	+0.04	16.	—0.02
8.	+0.02	—	+0.02	—	—0.04	—	—0.02	17.	—0.06	17.	+0.04
—	—0.03	—	—0.03	—	—0.06	18.	+0.01	—	+0.02	—	—0.02
—	—0.03	—	0.00	—	+0.01	—	0.00	18.	—0.01	18.	+0.04
—	+0.03	9.	0.00	9.	—0.04	25.	+0.03	—	0.00	—	+0.02
9.	—0.07	12.	+0.01	10.	+0.02		0.000			25.	0.00
10.	0.00	—	+0.04	—	—0.02			Nov. 30.	—0.03		
11.	—0.01	—	—0.03	12.	—0.04			—	—0.07	Nov. 30.	—0.01
12.	—0.10	—	—0.01	—	0.00					—	—0.02
—	—0.05	13.	+0.03	—	—0.02			Dec. 2.	—0.05		
—	+0.05	—	0.00	—	+0.01			—	—0.04	Dec. 2.	0.00
—	—0.01	15.	0.00	13.	—0.02			3.	—0.06	—	—0.01
13.	—0.01	—	+0.02	—	—0.03			4.	+0.02	3.	+0.02
—	0.00		—0.008	15.	—0.02			—	—0.01	4.	—0.03
15.	+0.01			—	+0.02				—0.019	—	—0.02
—	—0.01				—0.020						—0.002
	—0.009										

Diese Beobachtungsreihen lassen erkennen, dass, wie auch der Wechsel der Bewegungsrichtungen sei, der Unterschied doch höchstens auf einige Hundertel Zeitsecunden anwächst. Dieses Resultat steht aber in Widerspruch mit den Ergebnissen natürlicher Sterndurchgänge; da sich bei diesen zeigt, dass zwischen den beiden Kreislagen eines gebrochenen Fernrohres oftmals sehr erhebliche Unterschiede auftreten, welche überdies zeitlich grossen Schwankungen unterworfen sind. Doch giebt es wiederum andere Combinationen, innerhalb welcher diese Unterschiede fast gänzlich verschwinden; es lässt dies vermuthen, dass der Grund zur Entstehung dieser Differenzen nicht unmittelbar in den Beobachtern selbst zu suchen ist, sondern aus der Wirkung anderweitiger Einflüsse hervorgeht. Ehe jedoch auf diese Verhältnisse specieller eingegangen werden soll, möge zuvor eine Zusammenstellung der hierüber gesammelten Beobachtungsreihen folgen:

1) Am Universalinstrument in Leiden.

Jede Zahl innerhalb einer Kreislage Mittel aus 3—7 Sternen, jeder Beobachter 10 Fäden.

Registrirmethode.

Albrecht — Kam.					Albrecht — v. Hennekeler.				
1867	West	Ost	W. — O.	Mittel	1867	West	Ost	W. — O.	Mittel
Juni 6.	—0^{s}03	—0^{s}05	+0.02	—0^{s}04	Juni 6.	—0^{s}06	—0^{s}07	+0^{s}01	—0^{s}065
9.	—0.08	—0.05	—0.03	—0.065	7.	+0.01	—0.05	+0.06	—0.02
10.	+0.01	—0.14	+0.15	—0.065	9.	+0.03	—0.04	+0.07	—0.005
11.	+0.01	—0.01	+0.02	0.00	—	—0.05	—0.04	—0.01	—0.045
—	—0.07	—0.04	—0.03	—0.055	11.	—0.04	0.00	—0.04	—0.02
14.	—0.04	—0.08	+0.04	—0.06	—	0.00	—0.04	+0.04	—0.02
			+0.028		13.	—0.03	0.00	—0.03	—0.015
								+0.014	

2) Am Passageninstrument in Leipzig.

Jede Zahl innerhalb einer Kreislage Mittel aus 7—9 Sternen, jeder Beobachter 5 Fäden.

Registrirmethode.

Albrecht — Valentiner.				
1867	West	Ost	W. — O.	Mittel
März 25.	—0^{s}33	+0^{s}45	—0^{s}78	+0^{s}06
—	—0.39	+0.49	—0.88	+0.05
			—0.83[1]	

1 Diese Unterschiede sind die beträchtlichsten, welche bisher beobachtet wurden; sie sind um so auffallender, als die Ergebnisse der einzelnen Sterne, welche im Folgenden ausführlich mitgetheilt sind, ziemlich gut unter einander harmoniren:

West	Ost	Ost	West
—0^{s}26	+0^{s}49	+0^{s}35	—0^{s}38
—0.44	+0.51	+0.55	—0.58
—0.23	+0.32	+0.41	—0.19
—0.30	+0.48	+0.34	—0.34
—0.21	+0.58	+0.47	—0.35
—0.49	+0.58	+0.50	—0.56
—0.43	+0.66	+0.61	—0.29
—0.32	+0.39	+0.33	
	+0.44		

3) Am Passageninstrument in Berlin.

Jede Zahl innerhalb einer Kreislage Mittel aus 5—12 Sternen, jeder Beobachter 5 Fäden.

Registrirmethode.

Albrecht — Tietjen.					Albrecht — Valentiner.				
1867	West	Ost	W. — O.	Mittel	1867	West	Ost	W. — O.	Mittel
März 9.	—0^{s}.27	—0^{s}.03	—0^{s}.24	—0^{s}.15	Juli 13.	—0^{s}.14	+0^{s}.13	—0^{s}.27	—0^{s}.005
15.	—0.18	—0.03	—0.15	—0.105	14.	—0.14	+0.09	—0.23	—0.025
Juli 14.	—0.33	—0.16	—0.17	—0.245	15.	—0.05	0.00	—0.05	—0.025
15.	—0.29	—0.18	—0.11	—0.235	16.	—0.03	+0.05	—0.08	+0.01
16.	—0.28	—0.14	—0.14	—0.21	Nov. 9.	—0.12	+0.09	—0.21	—0.015
Sept. 26.	—0.23	—0.07	—0.16	—0.15	12.	—0.14	—0.01	—0.13	—0.075
			—0.162		27.	—0.05	+0.13	—0.18	+0.04
								—0.164	

Registrirmethode.

Tietjen — Valentiner.				
1867	West	Ost	W. — O.	Mittel
Juli 13.	+0^{s}.02	+0^{s}.30	—0^{s}.28	+0^{s}.16
15.	+0.05	+0.31	—0.26	+0.18
			—0.27	

4) Am Passageninstrument in Leipzig nach Veränderung der Fädenbeleuchtung

Jede Zahl innerhalb einer Kreislage Mittel aus 6—12 Sternen, jeder Beobachter 5 Fäden.

Registrirmethode.

Valentiner — Bäcklund.				
1867	West	Ost	W. — O.	Mittel
Juni 26.	—0^{s}.02	0^{s}.00	—0^{s}.02	—0^{s}.010
27.	+0.015	0.00	+0.015	+0.007
28.	—0.055	—0.03	—0.025	—0.042
30.	+0.03	0.00	+0.03	+0.015
			+0.001	

Diese Werthe sind sämmtlich aus unmittelbarer Beobachtung hervorgegangen; es giebt aber noch einige Reihen, welche auf mehr mittelbarem Wege erlangt, gleichfalls beträchtliche Unterschiede der Kreislagen erkennen lassen. So hatten sich bei Gelegenheit der Reduction der Längenbestimmung: Leipzig — Dablitz Indicien vorgefunden, welche einen derartigen Unterschied am gebrochenen Dablitzer Instrument vermuthen liessen; infolge dessen ist v. Littrow[1] bei der Reduction in der Weise verfahren, diesen Unterschied als Unbekannte einzuführen und aus den gesammten Beobachtungen eines Abends die wahrscheinlichsten Werthe dieser Unbe-

1 Astronomische Nachrichten. Band LXVIII. pag. 369.

kannten, sowie des Uhrstandes und der definitiven Verbesserungen der angenommenen Collimationen und Azimuthe abzuleiten. Auf diese Weise haben sich folgende Werthe für den Unterschied der persönlichen Gleichung im Sinne: *W* — *O* ergeben:

Aug- und Ohrmethode.				Registrirmethode.			
Bruhns		Weiss		Bruhns		Weiss	
Septbr. 16.	+0ˢ10	Septbr. 2.	—0ˢ19	Septbr. 18.	—0ˢ18	Septbr. 5.	—0ˢ34
18.	—0.27	5.	—0.43	23.	—0.07	11.	—0.32
19.	+0.05	8.	—0.13	Octbr. 3.	—0.12	Octbr. 5.	—0.25
20.	+0.06	11.	—0.05	4.	—0.02	7.	+0.05
23.	+0.05	Octbr. 5.	—0.19		—0.10		—0.21
24.	+0.21	6.	—0.08				
29.	+0.24	7.	—0.09				
30.	+0.04		—0.166				
Octbr. 3.	—0.07						
3.	+0.09						
4.	+0.29						
	+0.072						

Bei Gelegenheit dieser Untersuchung verweist v. LITTROW auch auf die Beobachtungsreihen am Binocular Eyepiece in Greenwich,[1] welche eine directe Anwendung auf den vorliegenden Fall zulassen. Dieses Binocular Eyepiece ist eine Vorrichtung, durch welche das Ocular des Meridiankreises wesentlich infolge eines vor demselben angebrachten Prismas in 2 Zweige getrennt wird, so dass durch Anwendung desselben die Möglichkeit geboten ist, dass gleichzeitig zwei Beobachter denselben Stern beobachten können. Die Erscheinung des Sterndurchganges ist in diesem Falle analog der im gebrochenen Fernrohr; die Beobachtungen lassen auch hier zum Theil ziemlich beträchtliche Unterschiede der beiden Stellungen erkennen; jedoch sind die Werthe infolge der geringen Zahl der Beobachtungen so schwankend, dass ihnen nur ein geringes Gewicht beigelegt werden kann. Beispiele für die mehr oder minder grosse Unsicherheit dieser Werthe liefern die folgenden Combinationen:

Dunkin — Ellis.			Henry — Henderson.		
Tag	Dunkin westlich	Dunkin östlich	Tag	Henry westlich	Henry östlich
1853. Octbr. 14.	—0ˢ17	+0ˢ09	1852. April 1.	+0ˢ69	+0ˢ17
	—0.25	—0.05		+0.60	+0.76
	—0.22	—0.03	3.	+0.56	+0.58
20.	—0.12	—0.03		+0.40	+0.65
	—0.15	—0.03		+0.67	+0.23
	—0.25	+0.04	1853. Novbr. 8.	—0.32	—0.30
Novbr. 9.	—0.20	—0.23		—0.28	—0.34
	—0.31	+0.01		—0.43	—0.19
	—0.05	—0.02	18.	+0.13	+0.20
				+0.33	+0.50
				+0.57	+0.21

1 Greenwich Observations. 1852 pag. XLVI.; 1853 pag. XLIV.

Ein fernerer Fall eines solchen Unterschiedes der persönlichen Gleichung, je nach der Kreislage, scheint in der Altona-Schweriner Längenbestimmung vorzukommen. Peters hat bei der Ausführung derselben das Verfahren eingeschlagen, ausser den eigentlichen Sternen der Längenbestimmung an jedem Tage und in jeder Kreislage noch 3—5 Fundamentalsterne zu beobachten, um aus denselben einen approximativen Uhrstand abzuleiten, mit Hülfe dessen alsdann die Reduction der eigentlichen Beobachtungen ausgeführt wurde. Auf diese Weise hat Peters aus der beigeschriebenen Zahl von Sternen folgende Uhrstände erhalten:

In Altona.				In Schwerin.			
1858	West	Ost	Differenz	1858	West	Ost	Differenz
Septbr. 6.	$+9^{s}17$ (3)	$+9^{s}53$ (5)	$+0^{s}36$	Septbr. 10.	$+17^{s}07$ (3)	$+17^{s}24$ (3)	$+0^{s}17$
16.	+1.73 (4)	+2.07 (3)	+0.34	11.	+17.27 (3)	+17.39 (4)	+0.12
17.	+0.99 (3)	+1.37 (3)	+0.38	12.	+17.04 (3)	+17.22 (3)	+0.18
			+0.36	13.	+16.75 (3)	+16.93 (3)	+0.18
							+0.16

Diese Werthe ergeben einen beträchtlichen Unterschied der beiden Kreislagen; sie zeigen aber auch, dass dieser Unterschied merklich verschieden ist je nach dem Orte, an welchem beobachtet wurde. Peters erklärt diese Abweichung in der Weise, dass er als wahrscheinlichen Grund derselben die Seitenbiegung der Axe, insofern dieselbe ein anderes Gesetz befolgt, als durch den Ausdruck:

$$a \cos z \sec \delta$$

gegeben (denn für Biegungen unter dieser Form sind die Werthe bereits corrigirt), sowie die Unregelmässigkeit der Zapfen angiebt. Er hält es für genügend, empirisch ein Correctionsglied zu bestimmen, welches Uebereinstimmung in diese Werthe bringt und spricht sich a. a. O. pag. 200 in folgender Weise aus: »Nach einigen Versuchen ergab sich, dass eine Correction von der Form:

$$\mp p \cdot \frac{-0.375 + \cos 2z}{\cos \delta} \quad \begin{cases} \text{Kreis West} \\ \text{Kreis Ost} \end{cases}$$

der genannten Forderung sehr gut entspricht etc.«

Dem Verfasser will es jedoch scheinen, dass eine so complicirte empirische Form wenig Anspruch auf Realität machen kann, besonders mit Rücksicht darauf, dass diese Beobachtungen in Altona und Schwerin an ein und demselben Instrument ausgeführt sind und sich die Differenzen daher, wenn sie nur durch Unvollkommenheiten des Instrumentes bedingt wurden, an beiden Orten hätten gleich gross zeigen müssen; es dürfte wahrscheinlicher sein, dass diese Differenzen lediglich aus der persönlichen Gleichung hervorgehen.

Die Mehrzahl dieser Beobachtungsreihen bestätigt, was schon am Eingange dieser Untersuchung erwähnt wurde, dass in diesem Unterschied zwischen den beiden Kreislagen ein Element ziemlicher Unsicherheit gegeben ist; während wieder einige andere Beobachtungsreihen kaum eine Spur eines solchen Unterschiedes erkennen lassen. Berücksichtigt man ferner, dass

auch bei sämmtlichen Versuchsreihen an Zeitcollimatoren diese Unterschiede von fast verschwindender Grösse sind, so liegt die Vermuthung nahe, dass der eigentliche Grund zur Entstehung derselben in einem Umstande zu suchen ist, welcher bei Bestimmung der persönlichen Gleichung aus natürlichen Sterndurchgängen mitwirkt, auf welchen bisher aber noch nicht in genügender Weise Rücksicht genommen war. Ein solcher Factor liegt in der Beleuchtung der Fäden und die Discussion der vorliegenden Beobachtungsreihen deutet darauf hin, dass eine excentrische Beleuchtung derselben als eigentliche Ursache zur Entstehung dieser Unterschiede anzusehen ist. Es geht dies unter anderen ziemlich deutlich aus den Beobachtungsreihen sub 2 und 4 hervor, welche beide an demselben Instrument ausgeführt sind, wobei jedoch bei der ersteren eine excentrische Beleuchtung stattfand. Bezüglich der Deutung dieser Erscheinung möge hier auf die Discussionen bei Gelegenheit der allgemeinen Conferenz der Bevollmächtigten der europäischen Gradmessung im Herbst 1867 verwiesen werden, welche in extenso im Bericht dieser Conferenz pag. 88—89 und pag. 93 mitgetheilt sind.

Da die obigen Discussionen ergeben haben, dass bei einem Wechsel der Bewegungsrichtung der Sterne zeitweilig kleine Variationen im Betrage der persönlichen Gleichung wahrzunehmen sind, so wird die Frage nahe liegen, ob nicht auch verschiedene Posituren des Beobachters den Werth derselben merklich modificiren können. In dieser Beziehung hat Wolf[1] an seinem Zeitcollimator einiges Material gesammelt; er findet für seinen absoluten persönlichen Fehler den verschiedenen Stellungen entsprechend folgende Werthe:

1. Reihe:	Beobachter stehend, ohne Prisma	+ 0ˢ.113
2. »	» auf dem Rücken liegend, mit Prisma	+ 0.114
3. »	» » » » » » »	+ 0.125
4. »	» stehend, ohne Prisma	+ 0.103

Ferner an einem anderen Tage:

bei gewöhnlicher Lage des Kopfes	+ 0ˢ.118
Verbindungslinie der Augen parallel der Axe des Fernrohres	+ 0.127

Wiewohl auf diese Resultate wenig Gewicht gelegt werden kann, weil dieselben sich nur auf einen Beobachter beziehen, so scheint doch aus ihnen in Verbindung mit den Erfahrungen über den Einfluss einer wechselnden Bewegungsrichtung der Sterne hervorzugehen, dass alle Einflüsse dieser Art im Allgemeinen nur von secundärer Ordnung sind, wiewohl es sich empfehlen wird, dieselben nicht gänzlich zu vernachlässigen.

Bevor diese Untersuchung über den Einfluss, welchen die verschiedenartigen äusseren Umstände auf den Betrag der persönlichen Gleichung ausüben, abgeschlossen wird, ist es nöthig, noch einer Erscheinung zu gedenken, welche bei der Deutung der physiologischen Phänomene, aus welchen die persönliche Gleichung hervorgeht, von einiger Bedeutung ist. Es betrifft dies die Wahrnehmung, dass zwischen der persönlichen Gleichung bei Sterndurchgängen und derjenigen bei plötzlichen Ereignissen charakteristische Unterschiede auftreten; eine Thatsache, die

1 Annales de l'observatoire impérial de Paris. tome VIII.

aus einer ziemlichen Reihe von Beispielen mit Sicherheit hervorgeht. So fand sich die persönliche Gleichung: BESSEL — ARGELANDER[1] aus Sterndurchgängen zu: — 1ˢ22, hingegen aus 21 gemeinschaftlich beobachteten Ein- und Austritten am dunkeln Mondrande zu: — 0ˢ28 und aus 78 Beobachtungen plötzlicher Erscheinungen, wobei die Uhrschläge ganz wie bei den Sterndurchgängen gezählt, die Bruchtheile der Secunde aber nach dem Gehör geschätzt wurden, zu: — 0ˢ22. Ein weiteres Beispiel liefert die persönliche Gleichung: GERLING — NICOLAI,[2] für welche sich aus 72 Sterndurchgängen: + 0ˢ78 ergab, während aus 308 Beobachtungen von Lichtblitzen der Werth: + 0ˢ16 hervorging.

Nach dieser speciellen Erörterung der verschiedenartigen Einflüsse wird man nun Gesammtresultate ziehen können; es wird sich hierbei empfehlen, die rein mathematischen Resultate, welche sich auf die Sicherheit beziehen, mit welcher die persönliche Gleichung innerhalb eines kürzeren oder längeren Zeitintervalles ermittelt werden kann, von denen zu trennen, welche die physiologische Deutung der Phänomene umfassen. Beschränkt man sich daher zunächst auf die mathematischen Resultate, so ist hinsichtlich dieser an eine Erscheinung zu erinnern, welche bei allen ausgedehnteren Bestimmungsreihen der persönlichen Gleichung zu beobachten ist und darin besteht, dass beim Uebergang von einem Stern zum anderen weit beträchtlichere Schwankungen im Betrag der persönlichen Gleichung auftreten, als dies auf Grund der Uebereinstimmung der Fäden innerhalb eines Sterndurchganges zu erwarten ist. Es führt dies zur Vermuthung, dass ausser der Unsicherheit in der Beobachtung der Fadendurchgänge beim Uebergang von Stern zu Stern noch eine neue Fehlerursache hinzutritt, welche sich vielleicht in der Weise deuten lässt, dass, so lange der Beobachter unausgesetzt in das Fernrohr hineinsieht und mit dem Auge dem Laufe des Sternes folgt, die persönliche Gleichung innerhalb eines kürzeren Zeitintervalles nur unbedeutenden Schwankungen unterworfen ist; dass dieselben aber zu beträchtlicherer Grösse anwachsen, wenn der Beobachter nach erfolgtem Durchgange des Sternes aufhört in das Fernrohr zu sehen und vorübergehend anderen Operationen, z. B. der Einstellung des folgenden Sternes, seine Aufmerksamkeit zuwendet. Um über die Zulässigkeit dieser Ansicht entscheiden zu können, wird es nothwendig sein, die Formel für diese wahrscheinliche Unsicherheit im Betrag der persönlichen Gleichung beim Uebergang von einem Stern zum andern zu entwickeln und dann auf Grund derselben ein möglichst umfassendes Beobachtungsmaterial zu discutiren.

Der allgemeine Ausdruck für den wahrscheinlichen Fehler der persönlichen Gleichung aus einem Stern wird nach dem Obigen von der Form sein:

$$W^2 = A^2 + E^2$$

worin A den inneren wahrscheinlichen Fehler, welcher aus der Uebereinstimmung der einzelnen Fäden untereinander hervorgeht, und E denjenigen Theil bezeichnet, welcher den Schwankungen der persönlichen Gleichung beim Uebergang von Stern zu Stern entspricht. Beschränkt man

1 Astronomische Beobachtungen in Königsberg. Abth. VIII. pag. V—VI.
2 Astronomische Nachrichten. Band XV. pag. 261.

sich auf die Methode zur Bestimmung der persönlichen Gleichung,[1] welche am meisten in Gebrauch ist, insofern sie rasch zum Ziele führt, und die persönliche Gleichung unabhängig von der Kenntniss der Instrumentalfehler und des Uhrgangs zu erlangen gestattet: nämlich diejenige, bei welcher der eine Beobachter den Durchgang des Sternes durch die eine Hälfte der Fäden, der zweite den Durchgang durch die andere Hälfte beobachtet — wobei übrigens zur Elimination von Fehlern in den Fadendistanzen bei jedem Uebergang von einem Stern zum andern ein Wechsel der Beobachter mit den Fäden angemessen ist — und setzt man voraus, dass jeder Beobachter n Fäden beobachtet und die wahrscheinlichen Fehler der Fadendurchgänge resp. α' und α'' seien, so erhält man für A den Ausdruck:

$$A = \sqrt{\left(\frac{\alpha'}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{\alpha''}{\sqrt{n}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\alpha'^2 + \alpha''^2}{n}}$$

Diese Relation wird man mit Rücksicht darauf, dass für geübte Beobachter die wahrscheinlichen Fehler der Fadendurchgänge nahezu von gleicher Grösse sind, noch dadurch vereinfachen können, dass man statt α' und α'' das arithmetische Mittel α dieser beiden Werthe einführt; es ergiebt sich alsdann:

$$A = \alpha \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Betrachtet man nun die andere Componente E mit Bezugnahme auf die obige Definition als unabhängig von der Zahl der Fäden, so wird der vollständige Ausdruck für den wahrscheinlichen Fehler der persönlichen Gleichung aus einem Stern von der Form sein:

$$W^2 = \left(\alpha \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2 + E^2$$

wobei also W denjenigen wahrscheinlichen Fehler bedeutet, welcher aus der Uebereinstimmung der Resultate der einzelnen Sterne untereinander hervorgeht. Dagegen wird man für die wahrscheinliche Unsicherheit der persönlichen Gleichung beim Uebergang von einem Stern zum anderen den Ausdruck erhalten:

$$E = \sqrt{W^2 - \frac{2}{n}\alpha^2}$$

Es lässt sich a priori vermuthen, dass dieser Werth E in gewissem Grade von der Zeitdauer abhängig sein wird, über welche sich die Beobachtungen erstrecken, speciell von der Ausdehnung derjenigen Zeitintervalle, innerhalb deren die Ergebnisse der einzelnen Sterndurchgänge zu Mittelwerthen vereinigt sind. Aus diesem Umstande geht die Nothwendigkeit hervor, diese Grösse E für verschiedene Zeitintervalle zu bestimmen; es soll in dieser Beziehung zunächst die wahrscheinliche Unsicherheit der persönlichen Gleichung innerhalb einer fortlaufenden

1 Anderweite Methoden zur Bestimmung der persönlichen Gleichung sind: Die wiederholte Ausführung vollständiger Zeitbestimmungen im beständigen Wechsel der Beobachter und Ableitung der persönlichen Gleichung aus den resultirenden Uhrständen; ferner die Anwendung des Binocular Eyepiece, vergl. S. 23; endlich für den speciellen Fall der Sonnendurchgänge die Methode, das Bild der Sonne und der Fäden an einem weissen Schirm aufzufangen und an diesem Bilde die Beobachtung der Fadendurchgänge vorzunehmen: Washington Observations vol. I. pag. 49., Monthly notices XIX. No. 10. pag. 338.

Beobachtungsreihe, also innerhalb eines Beobachtungsabends ermittelt werden. Im folgenden Tableau sind desshalb die Grössen W abgeleitet aus den Abweichungen der Einzelwerthe vom Tagesmittel, wobei übrigens wegen des oft sehr merklichen Unterschiedes in der West- und Ostlage beide Kreislagen von einander getrennt zu Mitteln vereinigt wurden, aus welchem Grunde die Anzahl der Mittel durchgängig grösser ist als die Anzahl der Beobachtungstage.

Beobachter	Zeit der Beobachtung.	Zahl der			W	n	α	E
		Tage	Mittel	Sterne				
	I. Aug- und Ohrmethode.							
Foerster & Weiss	1865. August	3	4	67	0^{s}078	3,9	0^{s}092	+0^{s}042
» »	» Octbr.	3	5	94	0.057	4,0	0.088	—0.025
Bruhns & Auwers	» Octbr.	2	4	41	0.101	6,5	0.105	+0.083
	II. Registrirmethode.							
Foerster & Weiss	1865. August	2	4	28	0^{s}056	5,3	0^{s}080	+0^{s}027
» »	» Octbr.	1	2	24	0.038	5,0	0.071	—0.024
Romberg & Tiele	» April	4	5	43	0.062	4,7	0.069	+0.043
» »	» April	3	6	38	0.070	5,5	0.111	+0.020
Kam & Albrecht	1867. Juni	7	12	66	0.063	9,5	0.06	+0.057
v. Hennekeler & Albrecht	» Juni	5	10	70	0.051	9,5	0.06	+0.043
Tietjen & Albrecht	» März	3	5	39	0.049	4,8	0.072	+0.016
» »	» Juli	3	6	56	0.056	4,8	0.060	+0.040
Valentiner & Albrecht . .	» März	1	2	32	0.076	4,8	0.071	+0.061
» » . .	» Juli	4	8	65	0.069	4,8	0.058	+0.058
» » . .	» Novbr.	3	12	64	0.057	4,8	0.071	+0.034
Tietjen & Valentiner . . .	» Juli	2	4	37	0.046	4,8	0.072	—0.007
Plantamour & Hirsch . . .	1861. Octbr.	1	1	23	0.067	9,6	0.066	+0.060
» » . . .	1862. April	1	1	42	0.034	9,5	0.066	+0.015

Beim Ueberblick dieser Werthe, welche sich aus den verschiedenen Beobachtungsreihen für E ergeben, erscheint es auffallend, dass einige derselben negativ sind; es entspricht dies dem Fall, in welchem der wirkliche wahrscheinliche Fehler der persönlichen Gleichung aus einem Stern aus der Uebereinstimmung der Sterne untereinander kleiner gefunden wurde, als dies auf Grund des wahrscheinlichen Fehlers der Fadendurchgänge zu erwarten war. Dies enthält allerdings eine Absurdität; dieselbe lässt sich jedoch auf den Umstand zurückführen, dass die Ausdrücke der Wahrscheinlichkeitsrechnung nur dann strenge Resultate ergeben, wenn die Anzahl der Beobachtungen unendlich gross ist. Da diese Bedingung im vorliegenden Falle nicht erfüllt ist, so erscheint es bei Ableitung eines Mittelwerthes für E angemessen, diese Resultate, obwohl sie absurd sind, nicht auszuschliessen, sondern dieselben wirklich mit ihren negativen Vorzeichen einzuführen. Auf diesem Princip basirend erhält man, wenn man den einzelnen Bestimmungen von E gleiches Gewicht giebt, für die Aug- und Ohrmethode als Mittelwerth: $E = +0^s033$, für die Registrirmethode: $E = +0^s032$. Will man aber den einzelnen Werthen nicht gleiches Gewicht zuertheilen, sondern nimmt man z. B. die Gewichte der Anzahl der beobachteten Sterne proportional, so erhält man den Werth: $E = +0^s031$; nimmt man aber als Gewichte die Anzahl der Sterne, welche durchschnittlich auf ein Mittel kommen, so ergiebt sich: $E = +0^s029$. Wenn auch die Sicherheit der Tausendel-Secunden

in diesen Resultaten noch bezweifelt werden kann, so geht doch aus alledem hervor, dass man innerhalb eines Beobachtungsabendes als wahrscheinliche Unsicherheit der persönlichen Gleichung beim Uebergang von Stern zu Stern als Mittelwerth

$$E = 0\overset{s}{.}03$$

festhalten kann. Allerdings zeigt ein Ueberblick der obigen Tabelle, dass die Sicherheit dieses Werthes für die Registrirmethode weit mehr verbürgt ist, als für die Aug- und Ohrmethode; es erscheint wahrscheinlich, dass der Werth für die Aug- und Ohrmethode eher etwas grösser ist als derjenige für die Registrirmethode.

Der Umstand, dass sich selbst bei ziemlich verschiedener Fädenzahl nahezu gleiche Werthe für E ergeben, deutet übrigens darauf hin, dass E fast ganz unabhängig von der Zahl der Fäden zu sein scheint, und beweist somit, dass die im Obigen ausgesprochene Ansicht über die Natur der Grösse E nicht sehr von der Wahrheit abweichen wird.

Dieser Werth: $E = 0\overset{s}{.}03$ wird jedoch, weil derselbe nur aus den Beobachtungen innerhalb eines Abendes abgeleitet ist, auch nur für diesen Umfang Verwendung finden können. Da aber zu einer vollständigen Bestimmung der persönlichen Gleichung die Beobachtungen eines Abendes nicht ausreichen, es vielmehr wünschenswerth ist, die Beobachtungen auf mehrere Abende zu vertheilen, so wird es von besonderem Interesse sein, nunmehr den Betrag der Grösse E auch für eine vollständige, auf mehrere Tage ausgedehnte Bestimmungsreihe der persönlichen Gleichung zu ermitteln. In diesem Sinne ist das folgende Tableau gebildet; es sind jedoch in demselben nur diejenigen Beobachtungsreihen aufgenommen worden, welche zwei oder mehr Beobachtungstage umfassen, und zwar die ersteren auch nur dann, wenn an beiden Tagen die persönliche Gleichung in beiden Kreislagen bestimmt wurde. Die Anzahl der Mittel ist in diesem Falle durchgängig 2, indem sämmtliche Beobachtungen in der West- und in der Ostlage zu je einem Mittelwerth vereinigt und aus den Abweichungen der Einzelwerthe von diesem Mittel die Grösse W gebildet wurde.

Beobachter	Zeit der Beobachtung	Zahl der Tage	Zahl der Sterne	W	n	α	E
	I. Aug- und Ohrmethode.						
Foerster & Weiss	1865. Aug. 19—25.	3	67	0ˢ078	3,9	0ˢ092	+0ˢ042
» »	» Oct. 7—11.	3	94	0.065	4,0	0.088	+0.019
Bruhns & Auwers	» Oct. 2—3.	2	41	0.110	6,5	0.105	+0.093
	II. Registrirmethode.						
Foerster & Weiss	1865. Aug. 22—25.	2	28	0ˢ057	5,3	0ˢ080	+0ˢ029
Romberg & Tiele	» April 6—10.	4	43	0.076	4,7	0.069	+0.061
» »	» April 22—24.	3	38	0.071	5,5	0.111	+0.024
Kam & Albrecht	1867. Juni 6—14.	7	66	0.063	9,5	0.06	+0.056
v. Hennekeler & Albrecht	» Juni 6—13.	5	70	0.050	9,5	0.06	+0.041
Tietjen & Albrecht	» März 9—18.	3	39	0.053	4,8	0.072	+0.025
» »	» Juli 14—16.	3	56	0.056	4,8	0.060	+0.040
Valentiner & Albrecht . .	» Juli 13—16.	4	65	0.073	4,8	0.058	+0.063
» » . .	» Nov. 9—27.	3	64	0.062	4,8	0.071	+0.042
Tietjen & Valentiner . . .	» Juli 14—16.	2	37	0.046	4,8	0.072	0.000

In Bezug auf die Aug- und Ohrmethode wird man infolge des geringen Umfanges der vorhandenen Beobachtungsreihen nur einen angenäherten Werth für E ableiten können; es findet sich aus den obigen Ergebnissen, dass unter diesen Umständen E merklich grösser ist, als im vorhergehenden Falle, und dass man ungefähr:

$$E = 0^s\!.05$$

als Mittelwerth betrachten kann.

Weit sicherer ist der Werth für die Registrirmethode bestimmt; man findet hierfür als Mittel, wenn man die Gewichte als gleich annimmt: $E = 0^s\!.038$; setzt man sie aber der Anzahl der beobachteten Sterne oder der Anzahl der Beobachtungstage proportional, so erhält man resp. $E = 0^s\!.041$ oder $E = 0^s\!.043$. Da auch in diesem Falle die Tausendel-Sekunden noch nicht verbürgt sind, so kann man als Mittelwerth für die wahrscheinliche Unsicherheit der persönlichen Gleichung beim Uebergang von Stern zu Stern innerhalb einer auf ca. 1 Woche ausgedehnten Beobachtungsreihe:

$$E = 0^s\!.04$$

annehmen.

Die Vergleichung des zweiten Tableau mit dem ersteren lehrt, dass beim Uebergang von Tag zu Tag noch ein weiteres Element der Unsicherheit hinzutritt; es folgt hieraus, dass die Beobachtungen eines einzelnen Abendes im Allgemeinen eine constante Abweichung vom Mittelwerth der persönlichen Gleichung zeigen können, und es wird daher angemessen sein, in allen Fällen, wo man die persönliche Gleichung mit möglichster Schärfe ermitteln will, die Beobachtungen auf eine grössere Reihe von Tagen zu vertheilen.

Hinsichtlich der Grösse E liegt die Vermuthung nahe, dass sie in gewissem Grade auch von der Declination der beobachteten Sterne, sowie von der Vergrösserung abhängig sein wird; jedoch scheinen diese Einflüsse, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, nur von secundärer Ordnung zu sein; man wird dieselben im vorliegenden Falle um so mehr vernachlässigen können, weil der im Obigen erlangte numerische Werth dieser Grösse seiner Ableitungsart zufolge bereits für eine mittlere Declination der Südsterne und für einen Mittelwerth der Vergrösserung gilt.

Nachdem nun der Zahlwerth für die Grösse E ermittelt, kann man mit Hülfe der Formel:

$$W = \sqrt{\left(\alpha \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2 + E^2}$$

unmittelbar den Grad der Sicherheit bestimmen, mit welchem die persönliche Gleichung aus der Beobachtung eines Sternes erhalten wird, und man kann durch Variation von n über den Zuwachs an Genauigkeit entscheiden, welchen man durch Vermehrung der Fädenzahl erreicht. Legt man bei der Aug- und Ohrmethode den Werth: $E = 0^s\!.05$, bei der Registrirmethode: $E = 0^s\!.04$ zu Grunde, um sogleich den wahrscheinlichen Fehler innerhalb einer vollständigen Bestimmungsreihe der persönlichen Gleichung zu erhalten und führt man als wahrscheinliche Fehler der Fadendurchgänge diejenigen Werthe ein, welche auf Seite 9 und 10 hierfür abgeleitet sind, so erhält man für Sterne im Aequator bei verschiedener Vergrösserung und verschiedener Fädenzahl folgende Werthe für W:

Anzahl der Fäden pro Beobachter	Aug- und Ohrmethode.			Registrirmethode.		
	Vergr. 40	Vergr. 80	Vergr. 150	Vergr. 40	Vergr. 80	Vergr. 150
1	0ˢ158	0ˢ124	0ˢ115	0ˢ139	0ˢ099	0ˢ086
2	0.117	0.094	0.088	0.102	0.075	0.067
3	0.100	0.082	0.078	0.087	0.066	0.060
4	0.090	0.075	0.072	0.078	0.060	0.055
5	0.084	0.071	0.068	0.072	0.057	0.053
6	0.079	0.068	0.065	0.067	0.054	0.051
7	0.076	0.066	0.063	0.064	0.053	0.049
8	0.073	0.064	0.062	0.062	0.051	0.048
9	0.071	0.063	0.061	0.060	0.050	0.047
10	0.069	0.061	0.060	0.058	0.049	0.047

Der Gang der Werthe in dieser Tabelle zeigt, dass man bei Vermehrung der Fädenzahl sehr bald an eine gewisse Grenze gelangt, über welche hinaus die Vermehrung der Fäden nur sehr geringen Zuwachs an Genauigkeit gewährt.

Auf Grund der im Früheren gegebenen Relationen wird man nun auch die Frage entscheiden können, mit welcher Sicherheit die persönliche Gleichung aus einer bestimmten Zahl über ein Intervall benachbarter Tage vertheilter Sterne bei einer gegebenen Vergrösserung und einer gegebenen Fädenzahl ermittelt werden kann. Bezeichnet man die Zahl der Sterne mit s, die Vergrösserung mit v und die Anzahl der Fäden für jeden Beobachter mit n, so erhält man für den wahrscheinlichen Fehler des Endresultates den Ausdruck:

$$w = \sqrt{\frac{2\,\alpha^2}{s\,n} + \frac{E^2}{s}}$$

oder wenn man die Aufgabe umkehrt und nach der Zahl der Sterne fragt, welche erforderlich ist, um einen bestimmten wahrscheinlichen Fehler des Endresultates zu erlangen:

$$s = \frac{2\,\alpha^2}{n\,w^2} + \frac{E^2}{w^2}$$

Beispielsweise erhält man aus 64 Sternen bei Anwendung der Registrirmethode unter Benutzung einer 80fachen Vergrösserung und einer Fädenzahl 5 für jeden Beobachter für den wahrscheinlichen Fehler des Endresultats

$$\pm\, 0\overset{s}{.}007.$$

Die gesammte bisherige Betrachtung bezog sich auf die persönliche Gleichung, wie sie aus natürlichen Sterndurchgängen hervorgeht; es ist jetzt die Frage zu erörtern, in wieweit die absoluten persönlichen Fehler, welche aus Beobachtungen an Zeitcollimatoren abgeleitet sind, einen analogen Werth der wahrscheinlichen Unsicherheit erkennen lassen. In dieser Beziehung ist daran zu erinnern, dass Beobachtungen der genannten Art bisher nur in geringem Umfange angestellt sind und daher auf Grund derselben noch kein sicheres Urtheil gewonnen werden kann; jedoch ist wenigstens zu constatiren, dass die bisherigen Resultate nicht in Widerspruch stehen mit den Ergebnissen natürlicher Sterndurchgänge. Es findet sich nämlich aus den Registrirbeobachtungen vom 1. bis 6. Februar, 6. bis 18. Mai und 5. bis 15. Juni 1867

am Zeitcollimator in Leiden, sowie aus den Beobachtungen vom 5. bis 25. Juli und 30. November bis 4. December 1867 am Zeitcollimator in Berlin für die wahrscheinliche Unsicherheit pro Tag im Betrag des absoluten persönlichen Fehlers bei 50—80facher Vergrösserung und der Geschwindigkeit der Aequatorsterne, wenn man für jede dieser Epochen und jeden Beobachter Mittelwerthe bildet, der Betrag: $\pm 0^s013$. Diesem würde für die wahrscheinliche Unsicherheit eines Tages im Betrag der persönlichen Gleichung: $\pm 0^s018$ entsprechen, während aus den Beobachtungen der natürlichen Sterndurchgänge für die gleiche Grösse: $\pm \sqrt{0.04^2 - 0.03^2} = \pm 0^s026$ gefunden wurde. Dass dieser letztere Betrag grösser ist, kann insofern kein Befremden erregen, als man es hier mit einem unruhig bewegten Stern, dort aber mit einem ganz präcisen Lichtobject zu thun hat.

Nach Erledigung dieser Resultate bezüglich der Sicherheit, mit welcher die persönliche Gleichung innerhalb gewisser Zeitepochen ermittelt werden kann, ist es nunmehr nöthig, auf die physiologische Deutung der bei der persönlichen Gleichung auftretenden Erscheinungen einzugehen. In dieser Beziehung ist es zunächst erforderlich den Vorgang zu charakterisiren, welcher bei Anwendung der verschiedenen Methoden zur Beobachtung der Fadendurchgänge vorliegt; er wird im Wesentlichen bestehen aus Combination verschiedener Sinneserregungen, welche durch einen Act bewusster geistiger Thätigkeit in Beziehung auf ihr gleichzeitiges Stattfinden beurtheilt werden. Diese Combination erstreckt sich bei der Aug- und Ohrmethode auf die Sinneswahrnehmungen des Auges und Ohres, zu welchen noch als weitere geistige Thätigkeit das Zählen der Uhrschläge hinzutritt; hingegen bei der Registrirmethode auf die Sinneswahrnehmung des Auges und die Erregung einer Muskelthätigkeit.

Beim Studium der hier auftretenden Erscheinungen ist es nothwendig, zunächst den Vorgang einer einzelnen Sinneswahrnehmung specieller zu betrachten und insbesondere die Zeitdauer zu untersuchen, welche zur Vollziehung einer solchen Wahrnehmung erforderlich ist. Dieser Vorgang besteht im Wesentlichen aus 3 Theilen: erstens dem Reiz, welcher auf das Receptivorgan ausgeübt wird; zweitens der Fortpflanzung des Reizes durch den Nervenapparat zum Gehirn; und drittens dem Uebergang desselben in das menschliche Bewusstsein. Alle diese drei Theile involviren einen Zeitverlust, wie dies im Folgenden specieller begründet werden soll.

Was den Reiz auf das Receptivorgan anlangt, so lässt schon der Umstand, dass derselbe wesentlich aus einem rein materiellen Vorgang besteht, vermuthen, dass dieser Reiz nicht momentan in voller Stärke eintreten und eben so plötzlich wieder verschwinden kann; er deutet vielmehr darauf hin, dass bei diesem Vorgang ein Anwachsen und ein continuirliches Abnehmen stattfindet, dergestalt, dass man erst nach Verlauf eines endlichen Zeitintervalles den Reiz wird als erloschen betrachten können. Als Beweise für diese Ansicht sind anzuführen: die sogenannten Nachbilder, welche man nach Betrachtung sehr heller Lichtobjecte selbst nach Schluss der Augenlider wahrnimmt; ferner das fortgesetzte Nachtönen, welches heftigen Erschütterungen des Trommelfelles folgt. Wenn diese Beispiele zunächst nur beweisen, dass heftige Reize erst nach Ablauf einer längeren Zeit erlöschen, so wird man doch aus denselben schliessen können, dass minder heftige Reize zwar in kürzerer Zeit verlaufen werden, aber dennoch ein endliches Zeitintervall zu ihrer Vollstreckung bedürfen.

Ein zweiter Zeitverlust findet statt bei der Uebertragung der Nervenerregung vom Receptivorgan nach dem Gehirn, da die mannichfachen Versuche über diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit übereinstimmend einen endlichen und zwar verhältnissmässig ziemlich kleinen Werth ergeben. Bezogen auf die Secunde als Zeiteinheit folgt aus den Versuchen von Helmholtz: 34^{m}, Hirsch: 34^{m}, Schelske: 32^{m} und 25^{m}, de Jaager: 26^{m}. Im Mittel findet sich also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Nervenstromes pro Secunde zu 30^{m}, so dass für die Fortpflanzung vom Gehirn bis zu den Muskeln der Hand allein schon 0^{s}03 erforderlich sind.

Endlich ist noch eine gewisse Zeitdauer nöthig für den Uebergang des rein materiellen Erregungszustandes im Nervenapparat des Gehirnes in den geistigen Act des Bewusstseins. Diese Zeitdauer erscheint zunächst wegen der gänzlichen Unkenntniss der hierbei sich vollziehenden Vorgänge und der Natur der bewussten geistigen Thätigkeit selbst nicht direct zugänglich; man kann jedoch über die Existenz einer solchen Zeitdauer indirect Aufschluss erhalten, indem man die Vorstellungsgeschwindigkeit bestimmt, d. i. die Zeit, innerhalb welcher das menschliche Bewusstsein nur für eine einzige Sinneswahrnehmung zugänglich ist. Diese Bestimmung kann dadurch geschehen, dass man das Minimum der Zeit ermittelt, innerhalb welcher zwei verschiedene Acte des menschlichen Bewusstseins auf einander folgen; oder mit anderen Worten: den Zeitverlust bestimmt, welcher stattfindet zwischen der Wahrnehmung eines momentanen Tones, einer aufblitzenden Lichterscheinung oder eines Empfindungsreizes und dem unmittelbar darauf erfolgten Schluss eines Handschlüssels. Eine Reihe ausführlicher Versuche dieser Art haben folgende Resultate ergeben:

Registriren					
eines Tones		einer Lichterscheinung		eines Empfindungsreizes an der Hand	
Hirsch [1]	0^{s}149	Hirsch [1]	0^{s}200	Guillaume [1]	0^{s}142
Hankel [2]	0.151	Donders & de Jaagers	0.201	Hankel [2]	0.155
Mayer [1]	0.158	Hankel [2]	0.205	Hirsch [1]	0.182
Guillaume [1]	0.162	Droz [1]	0.210	Anonym 3 [2]	0.200
Anonym 1 [2]	0.175	Guillaume [1]	0.236	Donders & de Jaagers	0.205
Anonym 2 [2]	0.189	Anonym 3 [2]	0.253		
Garnier [1]	0.202				
Anonym 3 [2]	0.235				
Desor [1]	0.243				
Hipp [1]	0.243				

Es steht zu erwarten, dass weniger geübte Beobachter diese Zeitdauer grösser finden werden als geübte; da jedoch hier nur für die Letzteren diese Zahlwerthe ermittelt werden sollen, insofern auch nur bei diesen auf eine Constanz derselben wird zu rechnen sein, so kann man als Mittelwerthe für geübte Beobachter folgende Zahlen annehmen:

1 Hirsch, Bulletin de la Société des sciences naturelles de Neuchâtel 1861.

2 Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, math.-phys. Classe. 1866. I. pag. 46.

Registriren eines momentanen Tones	. . . .	**0ˢ15**
» » aufblitzenden Lichtes	. . . .	**0.20**
» » Empfindungsreizes an der Hand		**0.16**

Wenn auch diese Zahlwerthe, die im Allgemeinen für die Wahrnehmung plötzlicher Ereignisse gelten, noch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erregungen im Nervenapparat, sowie die Zeitdauer enthalten, welche zwischen der Ankunft der vom Gehirn ausgehenden Nervenerregung am Muskel der Hand resp. des Fingers und der wirklich eintretenden Contraction desselben verfliesst (nach HELMHOLTZ: 0ˢ01), so lassen dieselben doch erkennen, dass auch nach Abzug dieser Zeitintervalle noch Grössen übrig bleiben, welche eine endliche Dauer der im Bewusstsein sich vollziehenden Vorgänge ausser Zweifel stellen.[1]

Man kann die Versuche über die Vorstellungsgeschwindigkeit auch in der Weise ausführen, dass man die Erregung einer Muskelthätigkeit ganz umgeht und einfach zwei Sinneswahrnehmungen mit einander combinirt. Versuche dieser Art mit Combination des Auges und Ohres sind von WUNDT angestellt; er bediente sich hierzu eines Pendels, welches bei einer gewissen Schwingungsphase einen momentanen Ton erzeugte, beobachtete die Stellung desselben für den Moment, wo er den Ton wahrnahm, und verglich dieselbe mit derjenigen, bei welcher der Ton wirklich entstand. WUNDT fand das interessante Resultat, dass er hierbei eine Schwingungsphase notirte, welche $^1/_8$ Secunde von der wahren abstand und zwar im Sinne einer Verfrühung oder einer Verspätung, je nachdem er die Hauptaufmerksamkeit auf das Auge oder das Ohr concentrirte. Eine fernere Versuchsreihe über die Combination zweier Sinnesthätigkeiten hat WOLF[2] ausgeführt, indem er Sterndurchgänge am Zeitcollimator nach der Aug- und Ohrmethode beobachtete und hierbei die Thätigkeit des Ohres dadurch ganz eliminirte, dass er die Secundenschläge ersetzte durch das momentane Aufblitzen einer GEISSLER'schen Röhre im Gesichtsfeld des Fernrohres, sowie in einer Reihe anderer Versuche durch schwache electrische Schläge, welche er auf die Hand einwirken liess. Er fand, dass diese Anordnung den Betrag des absoluten persönlichen Fehlers fast ungeändert liess, indem sich derselbe ergab zu:

+ 0ˢ11	für	gehörte	Secundenepochen
+ 0.08	»	gesehene	»
+ 0.11	»	gefühlte	»

1 Von besonderem Interesse sind einige weitere Experimente von Donders und de Jaager, insofern aus ihnen die Existenz einer Ueberlegungszeit mit ziemlicher Sicherheit hervorgeht. Die Experimentatoren verfuhren in der Weise, dass sie in jede Hand einen Taster nahmen und auf Grund einer Uebereinkunft entweder den einen oder den anderen schlossen, je nach dem Orte, an welchem sie gereizt wurden. War dieser Ort im Voraus bekannt, so erschien das Signal 0ˢ205 zu spät; war er hingegen unbekannt, so ergab sich das Zeitintervall: 0ˢ272, so dass die Ueberlegung, an welchem Orte der Reiz stattgefunden und der Entschluss zur Bewegung der richtigen Hand: 0ˢ067 Zeit in Anspruch nahm. In einem anderen Versuch operirten die beiden Experimentatoren in der Weise, dass der eine von ihnen eine Silbe aussprach und der andere dieselbe so rasch als möglich wiederholte. Es zeigte sich, dass wenn die Silbe dem zweiten Beobachter unbekannt war, derselbe 0ˢ088 später reagirte, als wenn sie ihm bekannt war.

2 Annales de l'observatoire impérial de Paris. tome VIII. pag. 190—191.

Doch sind diese Zahlenangaben nicht direct mit den obigen Resultaten vergleichbar, indem jene sich auf mehr oder weniger unerwartete Ereignisse, diese aber auf eine innerhalb enger Intervalle folgende regelmässige Wiederkehr von Sinneserregungen beziehen; man wird aus ihnen nur schliessen können, dass in diesem speciellen Falle der Anordnung die Zeitdauer der einzelnen Sinneswahrnehmungen für die verschiedenen Sinne nahezu dieselbe ist, wiewohl die geringe Anzahl der von Wolf angestellten Versuche und die Beschränkung auf einen einzigen Beobachter in dieser Beziehung noch eine gewisse Mannichfaltigkeit zulässt. Als weiterer Beweis für die endliche Dauer der Sinneswahrnehmungen ist der Umstand zu betrachten, dass wenn Lichtblitze oder Töne in engeren Intervallen als 0.05 bis 0.06 Secunden auf einander folgen, dieselben von den Sinnesorganen nicht mehr als getrennte Erscheinungen aufgefasst werden, sondern zu einer dauernden Lichterscheinung oder einem Ton übergehen.

Es wird nicht nöthig sein, noch weitere Argumente für die endliche Dauer der Sinneswahrnehmungen zu sammeln, da dieselbe aus den bereits angeführten Versuchen mit grosser Sicherheit hervorgeht. Wendet man dieses Resultat auf die persönliche Gleichung an, so wird man zu dem Schluss gelangen, dass in der verschiedenen Schnelligkeit der Sinneswahrnehmungen, welche aus der verschiedenen Organisation der Beobachter folgt, bereits ein Moment zur Entstehung persönlicher Unterschiede gegeben ist. Dennoch wird man keineswegs berechtigt sein, dies als einzigen Entstehungsgrund der persönlichen Gleichung zu betrachten, insofern die Versuche über die Vorstellungsgeschwindigkeit lehren, dass zwischen einer bedeutenden Zahl von Beobachtern doch eine verhältnissmässig gute Uebereinstimmung stattfindet; es wird vielmehr eine der Hauptursachen zur Entstehung persönlicher Unterschiede in der verschiedenen Anordnung zu suchen sein, in welcher bei den einzelnen Beobachtern die Sinneswahrnehmungen auf einander folgen, also z. B. ob man zuerst sieht und dann hört, oder umgekehrt. Deshalb wird es erforderlich sein, nunmehr auf die Combination der einzelnen Sinneswahrnehmungen einzugehen, welche bei Anwendung der beiden verschiedenen Methoden zur Beobachtung der Fadendurchgänge vorliegt. In dieser Beziehung ist schon am Eingang dieser Untersuchung darauf hingewiesen worden, dass die Registrirmethode nur die Combination zweier Sinnesthätigkeiten erfordert, während bei der älteren Methode zur Thätigkeit des Auges und Ohres wesentlich noch das Zählen der Uhrschläge hinzutritt. Eine eingehende Betrachtung der hierbei sich vollziehenden Vorgänge macht es sogar wahrscheinlich, dass sich hierbei noch ein vierter Act geistiger Thätigkeit vollzieht, welcher in der Erwartung des Eintritts der Uhrschläge besteht; denn es liegt die Vermuthung nahe, dass der Beobachter, da die Uhrschläge in regelmässiger Folge wiederkehren, bereits eine geraume Zeit vor Eintritt eines solchen seine ganze Aufmerksamkeit auf die Erwartung dieses Ereignisses concentrirt, und dass er infolge dessen unempfindlich wird gegen andere Sinneswahrnehmungen. Es würde eine natürliche Folge dieser Anschauungsweise sein, dass die Zeitdauer dieser Erwartung grösser sein muss, wenn die Uhrschläge in weiteren Intervallen auf einander folgen; man gelangt auf diese Weise zu dem Resultat, dass die Grösse der persönlichen Gleichung abhängig sein wird von der Länge der Intervalle im Gange der Uhrschläge. Speciell wird daraus hervorgehen, dass die absoluten persönlichen Fehler für diejenigen Beobachter, bei welchen dieselben an und für sich einen

bedeutenden Betrag erreichen, kleiner ausfallen werden, wenn die Intervalle der Uhrschläge kleiner werden, weil dadurch die Zeit der Erwartung abgekürzt wird. Von diesem Gesichtspunkt ausgehend wird man vielleicht im Stande sein, den absoluten persönlichen Fehler Bessel's zu erklären, welcher im Sinne einer Verfrühung sehr beträchtlich zu sein scheint; doch ist der Betrag derart, dass man auch auf diesem Wege kaum einen völlig genügenden Aufschluss erhalten wird. Encke[1] hat diesen Fall dadurch zu deuten gesucht, dass er annimmt, Bessel habe stets eine Secunde zu früh gezählt, wofür allerdings der Umstand spricht, dass sich der persönliche Fehler Bessel's genau um $\frac{1}{2}^s$ verkleinerte, als derselbe an einer Halbsecundenuhr beobachtete. Doch bleibt es dann unerklärt, dass in anderen Beobachtercombinationen sehr erhebliche Aenderungen der persönlichen Gleichung im Laufe verschiedener Jahre stattfinden, ohne dass sich wegen der regelmässigen Aenderung derselben die obige Erklärung einer wechselnden Zählweise darauf anwenden liesse. Ein Beispiel hierfür bietet die persönliche Gleichung zwischen Rogerson und Main, welche im Laufe von 13 Jahren von $-0^s\!.15$ bis $+0^s\!.70$ [2] anwuchs.

Während also bei Anwendung der Aug- und Ohrmethode eigentlich vier Acte des menschlichen Bewusstseins mit einander combinirt werden, hat man es bei Ausführung der Registrirmethode nur mit zwei Sinnesthätigkeiten zu thun; es kann daraus der Schluss gezogen werden, dass bei der letzteren Methode wegen dieser grösseren Einfachheit die persönlichen Fehler innerhalb rasch auf einander folgender Beobachtungen sich weniger ändern und nur in ausgedehnteren Zeiträumen, z. B. beim Uebergang von Stern zu Stern, grössere Oscillationen im Betrag derselben auftreten werden; während bei der Aug- und Ohrmethode schon innerhalb kürzerer Zeitintervalle beträchtliche Schwankungen der persönlichen Fehler zu erwarten sind. Auf diese Weise würde es sich erklären, dass die wahrscheinlichen Fehler der Fadendurchgänge bei der Registrirmethode kleiner sind, als bei der Aug- und Ohrmethode, sowie überhaupt hieraus der Schluss gezogen werden kann, dass die persönlichen Fehler bei Anwendung der Registrirmethode minder erheblichen Schwankungen unterworfen sind, als bei der Aug- und Ohrmethode, welcher durch die Beobachtungen auch bis zu gewissem Grade bestätigt wird.

Zur vollständigen Erschöpfung aller Fehlerursachen, welche bestimmend auf den Betrag des persönlichen Fehlers einwirken, ist es erforderlich, noch auf eine Versuchsreihe von Wolf[3] hinzuweisen, welche es wahrscheinlich macht, dass die Beobachtungen der Sterndurchgänge auch durch eine rein optische Täuschung verfälscht werden. Wolf hatte an seinem Zeitcollimator den Stern in der Weise hergestellt, dass er eine Platte, welche mit einer Oeffnung versehen war, durch eine dahinter aufgestellte Lampe erleuchtete. Brachte er aber ausser dieser einen Oeffnung noch zwei andere in der Weise an, dass die eine oberhalb, die andere unterhalb, alle drei aber in derselben Verticalen gelegen waren, und liess er die mittlere beständig, die

---

1 Monatsberichte der Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin. 1858. pag. 617—618.
2 Vergl. pag. 17.
3 Annales de l'observatoire impérial de Paris. tome VIII. pag. 191—192.

beiden äusseren aber nur intermittirend aufleuchten, so fand er, dass dieselben im Fernrohr gesehen nur so lange in einer Verticalen zu liegen schienen, als die Platte ruhte. Bewegte sich dieselbe aber, so erschien der beständig leuchtende Punkt den intermittirend aufleuchtenden vorausgeeilt zu sein, und zwar um so mehr, je grösser die Geschwindigkeit der Platte war. Doch bestand diese Erscheinung nur so lange, als die mittlere Oeffnung beständig leuchtete; sie verschwand, wenn auch sie nur intermittirend erhellt war. Diese Thatsache stimmt ganz überein mit einer Wahrnehmung von Hartmann,[1] welche derselbe an seinem Apparat zur künstlichen Nachahmung der Sterndurchgänge machte, und welche darin bestand, dass er bei Concentrirung seiner Aufmerksamkeit auf die Bewegung des künstlichen Sternes denselben stets um einige Theilstriche von seinem wahren Orte weiter nach vorwärts gerückt erblickte. Diese Erscheinung, welche Wolf beobachtete, wird sich wohl darauf zurückführen lassen, dass bei continuirlicher Bewegung eines Lichtobjectes eine geringere Zeit zur Auffassung desselben nöthig ist, als zu dem mehr oder weniger unerwarteten Ereigniss der momentan aufleuchtenden Lichterscheinungen, insofern diese Erklärung mit geringen Modificationen auch auf die Wahrnehmungen von Hartmann ausgedehnt werden kann.

Neben dieser grossen Reihe physiologischer Entstehungsursachen wird aber auch ein wesentlicher Grund zur Entstehung persönlicher Unterschiede in der verschiedenen Gewöhnung der Beobachter zu suchen sein, welche sich erstrecken kann auf die Auffassung der Uhrschläge oder der Coincidenzen von Stern und Faden; auf die Art, den Schluss des Handschlüssels zu bewirken u. s. w.

Fasst man am Schluss dieser Betrachtung alle Hauptmomente zusammen, welche bei der Entstehung persönlicher Unterschiede und ihrer Aenderungen im Laufe der Zeit mitwirken, so wird zu nennen sein: die verschiedene Vorstellungsgeschwindigkeit der einzelnen Beobachter, die wechselnde Zeitdauer in der Erwartung der Uhrschläge, ferner die Reihenfolge, in welcher der Beobachter die einzelnen Glieder der Erscheinung erfasst, endlich die verschiedene Gewöhnung in der Auffassung der einzelnen Vorgänge und in der Ausführung der betreffenden Manipulationen.

Wenn aber nachgewiesen ist, dass in der Beobachtung der Fadendurchgänge, sowie in den Schwankungen der persönlichen Gleichung Elemente ziemlicher Unsicherheit gegeben sind, so liegt das Bestreben nahe, nach einer Methode zur Beobachtung der Sterndurchgänge zu suchen, welche möglichst unabhängig von der Wirkung dieser Fehlerursachen ist. In dieser Hinsicht ist eine grössere Reihe von Vorrichtungen angegeben worden, welche mit grösserer oder geringerer Sicherheit zum Ziele führen; es mögen hier aber nur zwei derselben hervorgehoben werden, welche ihren Zweck noch am besten erfüllen und auch ihrer verhältnissmässigen Einfachheit wegen noch am ersten Aussicht auf praktische Anwendung finden dürften.

Das eine Verfahren, welches zuerst von Faye[2] vorgeschlagen wurde, bezieht sich auf die Anwendung der Photographie; man würde während der Dauer des Sterndurchganges zu

---

1 Grunert's Archiv der Mathematik u. Physik. Bd. XXXI. p. 17. — Astron. Nachrichten. Bd. LXV. p. 137.

2 Comptes rendus de l'Academie. Paris 1858. Jan. 25.

wiederholten Malen sehr empfindliche Platten auf momentane Dauer den aus dem Ocular austretenden Lichtstrahlen aussetzen und diese Momente in Bezug auf ihre Stelle in der Zeitscala etwa durch vorübergehende Herstellung metallischer Contacte sich selbst registriren lassen. Bestimmt man alsdann auf den Platten durch lineare Messungen die Entfernung des Sternes von den benachbarten Fäden, so wird man einen Genauigkeitsgrad erlangen, welcher allerdings bei der jetzigen Art der Beobachtung nicht zu erreichen ist, und welcher nur wenig dadurch afficirt wird, dass im Allgemeinen die Registrirung der Expositionsmomente gleichfalls mit einer kleinen Unsicherheit behaftet ist. Mit Ausnahme der Photographie von Sonnendurchgängen, welche recht gute Resultate ergeben hat, stellt sich jedoch der praktischen Ausführung dieses Verfahrens insofern ein Hinderniss entgegen, als man noch keine chemische Substanz besitzt, welche empfindlich genug ist, das Licht der Fixsterne und das der erleuchteten Fäden innerhalb eines sehr kleinen Zeitmomentes[1] zu fixiren.

Ein zweiter Vorschlag geht davon aus, dass eine Hauptschwierigkeit bei Beobachtung der Sterndurchgänge in der Herstellung der Beziehung zwischen der continuirlichen Bewegung des Sternes und den ruhenden Fäden zu suchen ist; dass also die Beobachtung wesentlich an Sicherheit gewinnen müsste, wenn man auch den Faden in Bewegung setzt, dergestalt, dass zwischen Stern und Faden relative Ruhe hergestellt wird. Der Beobachter kann alsdann mit grosser Sicherheit die Coincidenz von Stern und Faden bewirken und hat nur dafür zu sorgen, dass der Durchgang des Fadens durch einen Punkt, dessen Lage gegen den Meridian bekannt ist, mechanisch registrirt wird. Auch diese Art der Beobachtung wird innerhalb eines Sterndurchganges eine gewisse Vervielfältigung gestatten, jedoch kaum in dem Grade wie die obige photographische Methode; sie leidet ferner an dem Mangel, dass die völlig gleichförmige Bewegung des Uhrwerks, welches den Faden in Bewegung erhält, nur innerhalb gewisser Grenzen vorausgesetzt werden kann, und dass somit eine neue Fehlerquelle hinzutritt. Apparate dieser Art sind angegeben von:

Redier: Les Mondes I. pag. 491; the Reader IV. pag. 141. 1864. Juli 30.

Braun: Das Passagen-Micrometer. Leipzig 1865.

Uebrigens darf man an die Anwendung dieser Methoden keine zu grossen Erwartungen hinsichtlich der Vermehrung des Genauigkeitsgrades knüpfen, da in der Unsicherheit der Correctionen wegen der Instrumentalfehler eine Componente von bedeutendem Betrag hinzutritt.

Nach Darlegung der beiden Hauptbeobachtungsmethoden zur astronomischen Zeitbestimmung und Discussion der Fehlerquellen, welche die unmittelbaren Ergebnisse dieser Beobachtungen verfälschen, soll nunmehr auf das Verfahren eingegangen werden, mit Hülfe dessen man aus diesen Zahlwerthen die weiteren Resultate ableitet.

---

1 Dagegen ergeben die Versuche von Bond u. A., dass bei Annahme längerer Expositionszeiten der Photographie von Fixsternen keine Hindernisse in dem Weg stehen. Vergl. Astronomische Nachrichten. Band XLVII. pag. 1, XLVIII. pag. 1, XLIX. pag. 81.

Abschnitt III.

Reduction der Durchgangszeiten auf den Mittelfaden.

Die nächste Rechnungsoperation bildet die Reduction der beobachteten Durchgangszeiten an den einzelnen Fäden auf die Durchgangszeit durch den Mittelfaden. Die Formel für diese Reduction, welche sich unmittelbar aus dem Dreieck zwischen dem Pol, dem Stern und dem Fusspunkt der Senkrechten vom Stern auf den Ortsmeridian ergiebt, lautet bekanntlich:

$$\sin f = \sin F \sec \delta$$

wo f den Werth dieser Reductionsgrösse und F die Aequatorialfadendistanz bezeichnet.

Für Sterne von geringerer Declination erlaubt diese Formel eine wesentliche Vereinfachung insofern, als man in diesem Falle wegen der Kleinheit der Grössen f und F den Sinus mit dem Bogen vertauschen kann, so dass man den Ausdruck erhält:

$$f^s = F^s \sec \delta$$

Um einen Maasstab zu erhalten, bis zu welcher Declination der Sterne man diese abgekürzte Formel in Anwendung bringen kann, sind im Folgenden für einige specielle Werthe der Declination und der Fadendistanz im Aequator die Unterschiede der strengen Formel: $\sin f = \sin F \sec \delta$ und der obigen Näherungsformel angegeben, und zwar in dem Sinne, dass man die in der Tafel enthaltene Grösse zu den aus der Näherungsformel hervorgehenden Werth noch zu addiren hat, um auf das Ergebniss der strengen Formel zu kommen.

Declination	Fadendistanz im Aequator									
	5^s	10^s	15^s	20^s	25^s	30^s	35^s	40^s	45^s	50^s
80° 0′	0^{s}00	0^{s}00	0^{s}00	0^{s}00	0^{s}00	0^{s}00	0^{s}01	0^{s}01	0^{s}01	0^{s}02
81 0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.02	0.03
82 0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.02	0.03	0.04
83 0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.04	0.06
84 0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.05	0.07	0.10
85 0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.12	0.16
86 0	0.00	0.00	0.01	0.02	0.04	0.07	0.11	0.17	0.24	0.32
87 0	0.00	0.01	0.02	0.05	0.10	0.17	0.26	0.39	0.56	0.77
88 0	0.00	0.02	0.07	0.17	0.32	0.56	0.89	1.33	1.89	2.60
89 0	0.02	0.17	0.56	1.33	2.60	4.51	7.18	10.74	15.35	21.14

Bis zu 80° Declination wird man daher die abgekürzte Formel in Anwendung bringen können; dagegen wird man bei Sternen von höherer Declination entweder nach der strengen Formel rechnen müssen, oder bequemer noch an das Ergebniss der Näherungsformel eine

Correction anzubringen haben, welche man für die speciellen Werthe der Fadendistanzen des Fernrohres nach Analogie der obigen Tafel ein für allemal berechnen kann. Oder man verfährt in der Weise, dass man den Werth

$$\log x - \log \sin x = k$$

mit dem Argumente $\log \frac{\sin x}{15 \sin 1''}$ tabulirt und alsdann das Fadenintervall durch Anwendung des Ausdrucks: $\log f^s = \log F^s + \log \sec \delta + k$ bestimmt, wobei man k mit dem Argumente: $\log F^s + \log \sec \delta$ der Tafel entnimmt.

Da dieses Verfahren die meiste Bequemlichkeit zu bieten scheint, so ist dieser Schrift als Anhang eine ausführliche Tabelle der Werthe k in Einheiten der VI. Decimale beigegeben, bezüglich deren Einrichtung auf die ihr beigefügten Bemerkungen zu verweisen ist.

Eine Vereinfachung dieser Reduction auf den Mittelfaden kann ferner dadurch herbeigeführt werden, dass man gleich von vorn herein das arithmetische Mittel $\varDelta$ der Aequatorialfadendistanzen bildet, wobei man die Werthe auf der einen Seite des Mittelfadens mit positivem und die auf der anderen Seite mit negativem Vorzeichen einführt, alsdann aus den Durchgangszeiten aller Fäden das Mittel nimmt und dasselbe um die Grösse

$$\pm \varDelta^s \sec \delta$$

verbessert. Dieses Verfahren führt allerdings rascher zum Ziel, besitzt aber den Nachtheil, dass man bei Ausführung desselben kein Urtheil bezüglich der Uebereinstimmung der Fäden unter einander gewinnt, und es wird daher in allen den Fällen, wo eine erschöpfende Discussion der Beobachtungen beabsichtigt wird, nöthig sein, jeden Faden einzeln auf den Mittelfaden zu reduciren.

In manchen Fällen zieht man auch vor, nicht auf den Mittelfaden selbst, sondern auf das Mittel der Fäden zu reduciren, weil man für den Fall, dass man die einzelnen Fäden nicht getrennt behandeln will, bei jedem vollständig beobachteten Durchgange eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung erlangt, indem man alsdann einfach das Mittel aller Beobachtungszeiten zu nehmen hat.

Uebrigens sei hier darauf hingewiesen, dass im Falle eines sehr beträchtlichen Uhrganges vor Ausführung dieser Reduction die Durchgangszeiten an den einzelnen Fäden wegen desselben zu corrigiren sind.

Was ferner die Bestimmung dieser Werthe der Fadendistanzen im Aequator anlangt, so empfiehlt es sich, diese Werthe aus Sternbeobachtungen selbst herzuleiten, indem man die Differenz der beobachteten Durchgangszeiten durch den betreffenden Seitenfaden und den Mittelfaden bildet, sofern man auf den Mittelfaden reduciren will, oder die Differenz der Zeiten für den Seitenfaden und das Mittel aller Fäden, wenn man auf das Letztere reducirt, und aus diesen Grössen mit Hülfe der Formeln $F^s = f^s \cos \delta$ oder $\sin F = \sin f \cos \delta$,[1] je nachdem

---

1 Statt der obigen strengen Formel kann man auch von dem Ausdruck $F = \sin f \cos \delta$ Gebrauch machen, da sich zeigt, dass man durch diese Abkürzung selbst bei einem Fadenintervall von 50^s und einer Declination von 88° 40′ erst einen Fehler von noch nicht ganz 0ˢ002 begeht. Auch bei dieser Operation gewährt die Tafel am Schlusse dieser Schrift eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung.

man Zeit- oder Polsterne beobachtet hat, die Werthe der Aequatorialfadendistanzen bestimmt. Den Genauigkeitsgrad, den man auf diesem Wege erreicht, kann man mit Hülfe der Tafeln auf Seite 9 und 10 beurtheilen, da man mit Rücksicht darauf, dass jede solche Bestimmung auf einer Differenzmessung beruht, die daselbst im Bogen grössten Kreises ausgedrückten Beobachtungsfehler nur mit $\sqrt{2}$ zu multipliciren hat, um den wahrscheinlichen Fehler eines auf diese Weise erlangten Werthes von F zu erhalten. Es resultirt daher für den wahrscheinlichen Fehler einer Aequatorialfadendistanz, welche aus der Beobachtung eines Sternes von der Declination δ abgeleitet ist, folgender Ausdruck:

$$r = \sqrt{2a^2 \cos^2 \delta + 2\frac{b^2}{v^2}}$$

Für einige specielle Werthe der Vergrösserungen und der Declinationen ergeben sich hieraus die nachstehenden Werthe:

Aug- und Ohrmethode.				Registrirmethode.			
Declination	Vergrösserung			Declination	Vergrösserung		
	40	80	150		40	80	150
0°	0ˢ150	0ˢ113	0ˢ104	0°	0ˢ133	0ˢ091	0ˢ076
20	0.146	0.109	0.098	20	0.130	0.087	0.074
40	0.136	0.094	0.081	40	0.124	0.078	0.062
60	0.123	0.075	0.058	60	0.118	0.066	0.046
80	0.114	0.058	0.035	80	0.113	0.058	0.032
88 40′	0.112	0.057	0.030	88 40′	0.112	0.057	0.030

Die Fadendistanzen werden daher um so schärfer bestimmt, je grösser die Declination der Sterne und je stärker die Vergrösserung ist, und es zeigt sich, dass bei Beobachtungen von Polsternen beide Methoden gleichen Genauigkeitsgrad besitzen.

Doch wird nicht unter allen Umständen die Beobachtung des Polarsternes die vortheilhafteste Bestimmung der Fadendistanzen gewähren, weil neben dem Genauigkeitsgrad der Fadenintervalle aus der Beobachtung eines solchen Sterndurchganges noch die Zeitdauer in Berücksichtigung kommt, welche der Sterndurchgang erfordert. Es zeigt sich, dass man insbesondere bei schwächerer Vergrösserung der Fernröhre in ein und derselben Zeit schärfere Werthe der Fadendistanzen erhält, wenn man Sterne in grösserer Poldistanz beobachtet, womit freilich ein grösserer Aufwand an Arbeitskraft verbunden ist.

Da übrigens die Fadenintervalle die Winkel zwischen den einzelnen Fäden vom Mittelpunkt des Objectives aus betrachtet sind, so kann man dieselben nur so lange als constant ansehen, als die Entfernung der Fäden vom Objectiv dieselbe bleibt; man wird also Sorge dafür zu tragen haben, dass in dieser Beziehung während der Beobachtungen keine Aenderung stattfindet.

Eine weitere Methode zur Bestimmung der Fadenintervalle ist von GAUSS[1] angegeben worden; sie beruht auf directer Messung des Winkelabstandes der einzelnen Fäden mit Hülfe eines Theodoliten.

Bezeichnet man den am Theodoliten gemessenen Winkel zwischen dem Mittelfaden und einem der Seitenfäden mit w, mit z aber die Zenithdistanz des Passagenfernrohres, so ergiebt sich die Fadendistanz

$$F = w \sin z \quad ,$$

Doch ist hier zu bemerken, dass diese Methode gegenüber der ersteren weder an Zeit noch an Arbeit Ersparnisse gewährt.

An dieser Stelle ist noch der Einfluss der Refraction zu erwähnen, welcher bei Bestimmung und Verwerthung der Fadenintervalle in Berücksichtigung gezogen werden muss. Bezeichnet man mit z die wahre und mit z' die scheinbare Zenithdistanz, so erhält man als eigentlichen Ausdruck für die Reduction auf den Mittelfaden:

$$f^s = F^s \sec \delta \frac{\sin z}{\sin z'}$$

da aber die Grösse der Refraction approximativ durch den Ausdruck:

$$r = k \operatorname{tang} z$$

gegeben ist, so erhält man für das Sinusverhältniss die Relation:

$$\frac{\sin z}{\sin z'} = \frac{\sin z}{\sin (z - k \operatorname{tang} z)} = \frac{\sin z}{\sin z \cos (k \operatorname{tang} z) - \cos z \sin (k \operatorname{tang} z)}$$

in welchem Ausdrucke man bis zu ziemlich bedeutenden Zenithdistanzen wegen der Kleinheit des Winkels: $k \operatorname{tang} z$ den Cosinus gleich der Einheit setzen und den Sinus mit dem Bogen vertauschen kann; man erhält auf diese Weise:

$$\frac{\sin z}{\sin z'} = 1 + k \sin 1'' = 1.00028$$

und folglich für die Reduction auf den Mittelfaden:

$$f^s = 1.00028 \, F^s \sec \delta$$

Dieser Ausdruck ergiebt, dass man bei Bestimmung der Fadendistanzen aus Pol- oder Zeitsterndurchgängen nicht die wahren Fadendistanzen selbst, sondern die Werthe: 1.00028 F erhält, welche man alsdann unmittelbar zur Reduction anderweitiger Beobachtungen verwenden kann; man wird also in diesem Falle vom Einfluss der Refraction ganz abstrahiren können. Bestimmt man aber die Fadendistanzen durch directe Winkelmessung, so erhält man die wahren Fadenintervalle, und diese müssen erst mit dem Factor: 1.00028 multiplicirt werden, ehe man sie zur Reduction von Sternbeobachtungen anwenden kann.

Nachdem im Vorigen die Reduction der beobachteten Durchgangszeiten auf den Mittelfaden erörtert, soll nun im folgenden Capitel auf die Verbesserung dieser Zeiten wegen der nicht vollkommen richtigen Aufstellung des Instrumentes eingegangen werden.

---

1 Astronomische Nachrichten. Band II. pag. 371.

Abschnitt IV.

Ermittlung und Verwerthung der Instrumentalfehler.

Bezeichnet man mit:

i die Neigung der Drehungsaxe des Instrumentes gegen den Horizont; positiv, wenn das Westende der Axe zu hoch ist;

k das Azimuth, oder die Abweichung der Normalebene auf der Drehungsaxe von der Ebene des Meridians; positiv, wenn die Normalebene auf der Südseite des Meridians östlich von der Ebene des letzteren liegt;

c die Collimation, oder die Abweichung des Winkels zwischen der optischen Axe des Fernrohres und der Drehungsaxe von einem Rechten; positiv, wenn der Winkel zwischen Fernrohr und Kreisende grösser als 90° ist;

n und $90^0 - m$ resp. die Declination und den Stundenwinkel desjenigen Punktes, in welchem die über das Westende hinaus verlängert gedachte Drehungsaxe die scheinbare Himmelskugel trifft;

ferner mit U das Mittel der auf den Mittelfaden reducirten Durchgangszeiten an den einzelnen Fäden, mit Z die Zeit des Sterndurchganges durch den wahren Meridian und mit α die scheinbare Rectascension des Sternes, so lautet bekanntlich der MAYER'sche Ausdruck zur Verbesserung der Durchgangszeiten wegen der Instrumentalfehler für Sterne in oberer Culmination:

$$Z = U + i\,\frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos\delta} + k\,\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta} \pm c \sec\delta \quad \begin{cases}\text{Kreis West}\\ \text{Kreis Ost}\end{cases}$$

während BESSEL die Form angiebt:

$$Z = U + m + n \tan\delta \pm c \sec\delta \quad \begin{cases}\text{Kreis West}\\ \text{Kreis Ost}\end{cases}$$

hingegen HANSEN vom Ausdruck Gebrauch macht:

$$Z = U + i \sec\varphi + n\,(\tan\delta - \tan\varphi) \pm c \sec\delta \quad \begin{cases}\text{Kreis West}\\ \text{Kreis Ost}\end{cases}$$

Für den Uhrstand gilt alsdann die Relation:

$$dU = \alpha - Z.$$

Aus diesen Formeln erhält man unmittelbar auch die Ausdrücke für die untere Culmination, wenn man α und δ mit resp. $\alpha + 12^h$ und $180^0 - \delta$ vertauscht.

Anmerkung. Bei Entnahme der scheinbaren Rectascension aus den Ephemeridensammlungen ist zu berücksichtigen, dass die daselbst gegebenen Werthe noch einer Verbesserung wegen der täglichen Aberration bedürfen. Der Ausdruck für dieselbe zur Zeit der Culmination ist:

$$0^s\!.0207 \cos\varphi \sec\delta$$

und zwar ist diese Grösse positiv an die scheinbare Rectascension anzubringen bei der oberen Culmination und negativ bei der unteren Culmination. Da die Form dieser Verbesserung analog ist derjenigen wegen der Collimation des Fernrohres, so kann man dieselbe auch auf die Weise in Rechnung ziehen, dass man anstatt des wahren Collimationsfehlers c bei Kreis West den Werth: $c - 0^s\!.0207 \cos\varphi$, und bei Kreis Ost: $c + 0^s\!.0207 \cos\varphi$ in Anwendung bringt.

Es wird nunmehr erforderlich sein, die verschiedenen Methoden, welche zur Kenntniss dieser Instrumentalfehler führen, näher zu erörtern.

1. Bestimmung der Neigung.

Die Neigung wird in der bei weitem grössten Zahl der Fälle mit Hülfe eines Niveaus bestimmt, weil man auf diese Weise die Neigung am schnellsten und am wenigsten abhängig von anderweiten Fehlerquellen erhält; es wird nicht überflüssig sein, im Folgenden über die Ausführung dieses Verfahrens einige Erläuterungen zu geben.

Führt man in demjenigen Falle, wo sich der Nullpunkt des Niveaus in der Mitte der Libellenröhre befindet, die Ablesung am westlichen Ende der Blase mit positivem, und die am östlichen mit negativem Vorzeichen ein und bezeichnet dieselben in der einen Lage des Niveaus resp. mit m und n, in der anderen Lage aber mit m' und n', so ist der Ausdruck für die Neigung:

$$i = \frac{(m + m') + (n + n')}{4}$$

oder in Bezug auf die bequemste Art der numerischen Rechnung

$$i = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(m + n') + (m' + n)}{2} \right\}$$

Die Neigung ist in diesem Falle auf das Westende der Axe bezogen, so dass ein positiver Werth von i eine Erhöhung des Westendes der Axe über das Ostende anzeigt.

Genau dieselbe Relation gilt für den Fall, wo sich der Nullpunkt der Theilung an dem einen Ende der Libellenröhre befindet, sobald man nur die Ablesungen an beiden Blasenenden positiv nimmt, wenn der Nullpunkt im Osten liegt; dagegen beide negativ einführt, wenn er im Westen gelegen ist.

Die so gefundene Grösse ist aber nur dann als wahre Neigung anzusehen, wenn die Zapfen genau von gleicher Stärke sind; ist diese Bedingung nicht erfüllt, so bedarf es der Correction:

$$\Delta i = \frac{i - i'}{2} \cdot \frac{\sin W}{\sin W + \sin w}$$

wo W den halben Winkel der Lagerflächen und w den halben Winkel zwischen den Aufsatzflächen der Niveauträger, i und i' aber die in den beiden Kreislagen beobachteten Neigungen bezeichnen.

In der Mehrzahl der Fälle kann man die beiden Sinus im Nenner gleich setzen und alsdann von dem einfachen Ausdruck Gebrauch machen:

$$\Delta i = \tfrac{1}{4} (i - i')$$

um welchen Betrag jede der beobachteten Neigungen zu verbessern ist, und zwar in dem Sinne, dass die constante Differenz zwischen den Neigungen in den beiden Kreislagen dadurch verkleinert wird.

Bei Längenbestimmungen wird es besonderer Versuche zur Bestimmung dieser Correctionsgrösse nicht bedürfen, weil bei Ausführung derselben bereits eine so beträchtliche Zahl in engen Zeitintervallen aufeinanderfolgender Nivellements der Axe in den beiden Kreislagen erfolgt, dass diese vollständig zur Bestimmung der Verbesserung $\varDelta i$ ausreichen.

Hat man alsdann in der angedeuteten Weise die beobachteten Neigungen verbessert und dadurch die wahren Neigungen erlangt, so empfiehlt es sich, dieselben direct in Zeitsecunden auszudrücken. Man bedarf hierzu der Kenntniss des Winkelwerthes eines Niveautheiles, welche man auf die Weise erlangen kann, dass man das Niveau an einem Meridiankreise befestigt, und durch Bewegung der Micrometerschraube des letzteren unmittelbar die Beziehung herstellt zwischen den von der Blase durchlaufenen Theilen und den am Kreise abgelesenen Secunden. Oder man verfährt indirect in der Weise, dass man das Niveau auf einen Niveauprüfer aufsetzt und zunächst den Betrag eines Niveautheiles in Theilen der eingetheilten Fussschraube ermittelt; alsdann die Reductionszahl dieser Einheiten auf Secunden ableitet und mit Hülfe derselben den Niveautheil direct in Secunden ausdrückt. Aus einer grösseren Reihe von Versuchen dieser Art kann man den Endwerth dadurch bestimmen, dass man die Summe aller durchlaufenen Secunden dividirt durch die Summe aller entsprechenden Niveautheile; oder, wenn man die Methode der kleinsten Quadrate darauf anwenden will, dass man den Ausdruck bildet:

$$x = \frac{[an]}{[aa]}$$

da jede Bestimmung eine Gleichung liefert von der Form: $n = ax$, worin n die Anzahl der Secunden, a die entsprechende Zahl der Niveautheile und x den gesuchten Winkelwerth eines Niveautheiles bezeichnet.

Bei Bestimmung dieses Werthes ist es eine nothwendige Bedingung, die Niveauröhre in ihrer Fassung zu lassen, weil Versuche ergeben, dass man im anderen Falle den Niveauwerth sehr fehlerhaft erhalten kann. Uebrigens zeigt sich oftmals, dass bei Wiederholung der Bestimmungen ziemlich differirende Werthe für den Winkelwerth eines Niveautheiles hervorgehen, ein Umstand, der wohl darin seine Erklärung findet, dass nicht selten die Niveauröhre seitens der Fassung einen gewissen Druck erfährt, dessen Intensität von der Temperatur abhängig ist. Es erscheint daher gerathen, die Bestimmung dieses Winkelwerthes öfterer zu wiederholen, um eine Garantie bezüglich der Unveränderlichkeit desselben zu erhalten.

Ein zweiter Factor, welcher mehr oder minder Einfluss ausübt auf die Grösse dieses Werthes, ist die Länge der Blase, welche zum Theil von directem Einflusse sein, zum anderen Theil aber nur insoweit in Frage kommen wird, als sie ein Maasstab ist für die Grösse der Temperaturschwankungen. Im Allgemeinen werden sich diese beiden Einflüsse mit einander vermischen; nur bei den Niveaus, welche ein Reservoir besitzen, aus welchem Flüssigkeit ein- und ausgelassen werden kann, wird man dieselben von einander trennen können. Wie gross übrigens der Einfluss der Blasenlänge auf den Werth eines Niveautheiles werden kann, lehrt die Untersuchung eines Niveaus bei Gelegenheit der Längenbestimmung zwischen Altona und

Schwerin,[1] wobei sich bei einer Gesammtlänge des Niveaus von 90ᵖ die nachfolgende Abhängigkeit eines Niveautheiles von der Blasenlänge fand:

Blasenlänge	Niveautheil
25ᵖ	0ᵖ070
30	0.079
35	0.087
40	0.094
45	0.099
50	0.103

Es ist aus diesem Grunde nothwendig, die Bestimmung bei verschiedenen Temperaturen und verschiedenen Blasenlängen zu wiederholen.

Was die Construction des Niveaus anlangt, so ist es für die Sicherheit in der Bestimmung der Neigung wesentlich, dass das Niveau an den Stellen der Zapfen aufsitzt, welche bei der Drehung die Lager berühren, weil man im anderen Falle mit diesem Niveau nur dann die wahre Neigung findet, wenn die beiden Zapfenquerschnitte, an welchem das Niveau aufsitzt, gleichviel höher oder tiefer liegen, als die in der Mitte der Lager befindlichen Querschnitte. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird man im Allgemeinen die Neigung fehlerhaft messen; man eliminirt jedoch diesen Fehler, wenn man in zwei um 180^0 von einander entfernten Lagen des Fernrohres nivellirt und diese Werthe zu einem Mittel vereinigt. Es wird in diesem Falle vortheilhaft sein, bei allen Nivellements während einer Längenbestimmung dieselben zwei Lagen des Fernrohres herzustellen, damit man sich die Möglichkeit später noch anzubringender Correctionen offen erhält. Solche Correctionen aber können nöthig werden infolge Unregelmässigkeit der Zapfengestalt, von derem Einfluss im weiteren Verlauf der Untersuchung ausführlicher die Rede sein wird.

Diese Methode, die Neigung mit Hülfe des Niveaus zu bestimmen, ist für Längenbestimmungen mit Rücksicht auf die Instrumente,[2] welche in der Regel hierbei Anwendung finden, fast ausschliesslich in Gebrauch; es sei jedoch hier noch auf zwei andere Verfahren hingewiesen, welche insbesondere bei Instrumenten von grösserer Stabilität mit Vortheil in Anwendung zu bringen sind.

Das eine Verfahren besteht darin, dass man bei Culmination eines Polsternes einige Fadendurchgänge direct, andere von einem Quecksilberhorizont reflectirt beobachtet.

Bezeichnet man die auf den Mittelfaden reducirten Durchgangszeiten bei directer und reflectirter Beobachtung resp. mit U und U', so erhält man die Relation:

---

1 Peters, Ueber die Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen Altona und Schwerin. Altona 1861. pag. 21.

2 Vergleiche: Verhandlungen der ersten allgemeinen Conferenz der Bevollmächtigten zur mitteleuropäischen Gradmessung. Berlin 1865. pag. 15.

$$i = \frac{U' - U}{2} \cdot \frac{\cos \delta}{\cos (\varphi - \delta)} \quad \text{für obere Culmination}$$
$$i = \frac{U' - U}{2} \cdot \frac{\cos \delta}{\cos (\varphi + \delta)} \quad \text{» untere »}$$

Bei der praktischen Ausführung dieses Verfahrens wird man sich nur der Polsterne bedienen können, weil sich nur bei diesen der Wechsel der Beobachtungsarten mit genügender Schnelligkeit bewerkstelligen lässt; es wird jedoch innerhalb des Gebietes dieser Sterne noch die Frage zu erörtern sein, welche Declination derselben die sicherste Bestimmung der Neigung gestattet. Nimmt man nur auf den Factor $\frac{\cos \delta}{\cos (\varphi \mp \delta)}$ Rücksicht, so gelangt man zu dem Resultat, dass man die Sterne so nahe als möglich am Pole annehmen müsse; diese Schlussfolge wird jedoch insofern nicht gerechtfertigt sein, als man hierbei die Unsicherheit in der Bestimmung des Werthes $U' - U$, welche mit wachsender Declination sehr rasch zunimmt, vernachlässigt. Es wird daher zur Entscheidung dieser Frage nothwendig sein, das Maass der Unsicherheit in der Bestimmung des Werthes: $U' - U$ festzustellen. Da dieselbe lediglich aus der Vergrösserung des Fehlers in der Beobachtung eines Fadendurchganges hervorgeht und der Ausdruck für diesen Fehler von der Form ist $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 \sec^2 \delta}$,[1] so wird unter der Voraussetzung, dass man $\frac{1}{2} n$ Fäden direct und ebensoviel reflectirt beobachtet, die Unsicherheit in $U' - U$ durch den Ausdruck gegeben sein:

$$\frac{2 \sqrt{a^2 + b^2 \sec^2 \delta}}{\sqrt{n}}$$

Mit Rücksicht darauf, dass bei Ausführung dieser Methode überhaupt nur Sterne in der Nähe des Poles in Betracht kommen, kann man sich die Abkürzung erlauben, das constante Glied im Ausdruck für den wahrscheinlichen Fehler gegenüber dem sehr beträchtlichen zweiten Gliede zu vernachlässigen; man erhält alsdann als Maass der Unsicherheit in $U' - U$:

$$\frac{2 b \sec \delta}{\sqrt{n}}$$

und der wahrscheinliche Fehler in der Bestimmung von i wird demnach von der Form sein:

$$r_i = \frac{2 b \sec \delta}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\cos \delta}{2 \cos (\varphi \mp \delta)}$$
$$r_i = \frac{b}{\sqrt{n}} \sec (\varphi \mp \delta)$$

Dieser Werth aber erreicht das Minimum $\frac{b}{\sqrt{n}}$ für die obere Culmination bei $\delta = \varphi$ und für die untere Culmination bei: $\delta = 180^0 - \varphi$, d. i. für Sterne im Zenith und Nadir. Man wird allerdings die Gültigkeit dieser Beweisführung bis zu diesen Grenzen nicht ausdehnen können; es geht jedoch aus derselben hervor, dass innerhalb des Gebietes der Polsterne, für welche die obige Abkürzung völlig gerechtfertigt ist, das Maximum der Sicherheit für Sterne in oberer Culmination und grösserer Poldistanz eintritt. Der Minimalwerth $\frac{b}{\sqrt{n}}$ gestattet

[1] wobei abkürzungsweise b statt der früheren Bezeichnung $\frac{b}{\nu}$ gesetzt ist.

übrigens einen Grenzwerth für die Genauigkeit festzustellen, mit welcher man die Neigung auf diesem Wege ermitteln kann. So ergiebt sich z. B. bei Anwendung einer 100fachen Vergrösserung, wenn man 4 Fäden direct und 4 reflectirt beobachtet, für den wahrscheinlichen Fehler der Neigung der Grenzwerth:

$$r_i = \pm 0\overset{s}{.}011.$$

Eine fernere Methode zur Bestimmung der Neigung beruht auf der alleinigen Anwendung eines Quecksilberhorizontes, indem man das Fernrohr senkrecht nach abwärts richtet und mittelst des beweglichen Fadens den Abstand des Mittelfadens von seinem reflectirten Bild in beiden Lagen der Axe misst.

Berücksichtigt man, dass im geraden astronomischen Fernrohr gesehen bei einem positiven Werthe der Neigung das reflectirte Bild stets westlich vom wahren Mittelfaden erscheint, während ein positiver Werth der Collimation das reflectirte Bild nach der dem Kreisende entgegengesetzten Seite versetzt, und bezeichnet man die mit dem beweglichen Faden gemessenen Distanzen in der West- und Ostlage des Kreises resp. mit d und d', indem man dieselben positiv einführt, wenn das reflectirte Bild im geraden astronomischen Fernrohr[1] gesehen westlich vom Mittelfaden liegt, so erhält man für die beiden Kreislagen die Ausdrücke:

$$\text{Kreis West:} \quad \tfrac{1}{2}d = i - c$$
$$\text{» Ost:} \quad \tfrac{1}{2}d' = i + c$$

folglich:

$$i = + \tfrac{1}{4}(d + d').$$

Sind die beiden Zapfen nicht von gleicher Stärke, so bedeutet i das arithmetische Mittel zwischen den Neigungen der wahren Drehungsaxe in beiden Lagen des Instrumentes, und man muss alsdann noch eine Correction an dasselbe anbringen, um die Neigung innerhalb einer bestimmten Kreislage zu erhalten. Setzt man in dieser Beziehung voraus, dass der Zapfen am Kreisende der stärkere ist und bezeichnet den Halbmesser desselben mit R, denjenigen des anderen Zapfens aber mit r, ferner die Entfernung der beiden Lager mit L, sowie den halben Winkel der beiden Lagerflächen mit W, so erhält man für die wahren Neigungen in den einzelnen Kreislagen die Ausdrücke:

$$\text{Kreis West:} \quad i' = + \tfrac{1}{4}(d + d') + \frac{R - r}{L \sin W}$$ [2]
$$\text{» Ost:} \quad i'' = + \tfrac{1}{4}(d + d') - \frac{R - r}{L \sin W},$$

1 Führt man die Beobachtungen nicht mit einem geraden, sondern einem gebrochenen Fernrohr aus, so ist zu berücksichtigen, dass einer scheinbaren Lage im geraden Fernrohr westlich vom Mittelfaden eine scheinbare Lage links vom Mittelfaden bei südlichen Zenithdistanzen und rechts von demselben bei nördlichen Zenithdistanzen im gebrochenen Fernrohr entspricht.

2 Die Zapfenungleichheit findet sich durch wiederholte Nivellirungen der Axe mittelst eines Niveaus; man erhält für dieselbe unter Benutzung der Bezeichnungen auf pag. 44 den Ausdruck:

$$R - r = \frac{i - i'}{2} L \frac{\sin W \sin w}{\sin W + \sin w}$$

In dem Falle einer Ungleichheit der Zapfen wird man aus den obigen Relationen auch nicht den wahren Werth der Collimation erhalten, sondern eine Grösse, welche um den Betrag: $\frac{R-r}{L \sin W}$ von derselben abweicht.

Bezüglich der praktischen Ausführung dieser Methode sei auf die verschiedenen Lehrbücher der Astronomie verwiesen; doch sei erwähnt, dass die ausgedehntere Anwendung dieses Verfahrens bei Gelegenheit von Längenbestimmungen mannichfache Vortheile bieten dürfte, da man auf diesem Wege gleichzeitig die Neigung und die Collimation erhält. Dass dieses bisher wenig erfolgt ist, hat wohl nur darin seinen Grund, dass die Mehrzahl der jetzt construirten transportablen Passageninstrumente eine senkrecht nach abwärts gerichtete Stellung des Fernrohres nicht gestatten.

2. Bestimmung der Collimation.

Unter den mannichfachen Verfahren, welche zur Ermittlung dieses Instrumentalfehlers angegeben sind, findet am meisten Anwendung bei transportablen Passageninstrumenten die Methode der Beobachtung eines Polsternes in beiden Lagen des Instrumentes, dergestalt, dass man zunächst einige Fadendurchgänge in der einen Lage beobachtet, alsdann umlegt und die übrigen Fadendurchgänge in der anderen Lage bestimmt. Reducirt man nun in den beiden Gruppen die einzelnen Fäden auf den Mittelfaden und corrigirt diese Durchgangszeiten wegen der Neigung der Axe, sowie eventuell wegen des Uhrganges, so erhält man die Relation:

$$c = \pm \frac{U' - U}{2} \cos \delta \quad \begin{cases} \text{obere Culmination} \\ \text{untere} \quad \text{»} \end{cases}$$

wo U die Durchgangszeit in der Westlage und U' diejenige in der Ostlage bezeichnet.

Eine Verbesserung wegen Zapfenungleichheit ist in diesem Falle nicht erforderlich, wenn man sich bei Berechnung der Neigungscorrectionen bereits der wahren (wegen der Zapfenungleichheit corrigirten) Neigungen der Drehungsaxe in der West- und Ostlage des Instrumentes bedient hat.

Wegen des Zeitverlustes, der mit der Umlegung verbunden ist, muss man sich bei Ausführung dieser Methode auf die Beobachtung von Polsternen beschränken; es wird nun innerhalb des Gebietes der Polsterne zu untersuchen sein, welche Declination der Sterne die sicherste Bestimmung der Collimation gewährt. Im Allgemeinen wird man bei Entscheidung dieser Frage die Unsicherheit der Neigungscorrectionen vernachlässigen können, weil dieselben für beide Lagen des Instrumentes von gleichem Vorzeichen sind und daher eine fehlerhaft angenommene Neigung keinen Einfluss auf die Differenz der Beobachtungszeiten ausübt. Alsdann bleibt noch übrig der Einfluss der Beobachtungsfehler in den Fadendurchgängen, sowie der Einfluss des obigen Factors $\cos \delta$, welche mit einander combinirt nach Analogie der Betrachtung auf S. 47 für den wahrscheinlichen Fehler der Collimation folgenden Ausdruck ergeben:

$$r_c = \sqrt{a^2 + b^2 \sec^2 \delta} \cdot \frac{\cos \delta}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{a^2 \cos^2 \delta}{n} + \frac{b^2}{n}}$$

wo n die Gesammtzahl der beobachteten Fäden bezeichnet.

Aus der Form dieses Werthes geht hervor, dass ein kleiner Zuwachs an Genauigkeit stattfindet in dem Maasse als die Poldistanz der Sterne sich verkleinert; doch ist dieser Zuwachs wegen der Kleinheit des Factors $\cos^2 \delta$ im ganzen Gebiet der Polsterne fast unmerklich, so dass man zu dem Resultate gelangt, dass der Genauigkeitsgrad in der Bestimmung der Collimation fast ganz unabhängig ist von der Declination des beobachteten Polsternes. So erhält man z. B. bei Beobachtung nach der Aug- und Ohrmethode an einem Fernrohr von 100facher Vergrösserung, wenn man 4 Fäden in der einen Lage und 4 Fäden in der anderen Lage des Instrumentes beobachtet, welchem Falle die Werthe entsprechen: $a = 0^s.070$, $b = 0^s.0318$, $n = 8$, für die verschiedenen Declinationen folgende wahrscheinliche Fehler der Collimation:

$$\begin{array}{ll} \delta = 80^0 & r_c = \pm\, 0^s.0120 \\ 85^0 & \pm\, 0.0115 \\ 88^0\,40' & \pm\, 0.0113 \end{array}$$

Da man sich übrigens für Polsterne des abgekürzten Ausdruckes:

$$r_c = \pm \frac{b}{\sqrt{n}} = \pm \frac{3^s.18}{v\sqrt{n}}$$

bedienen kann, so ergiebt sich unmittelbar, dass die Genauigkeit der Collimationsbestimmung umgekehrt proportional der Vergrösserung und der Wurzel aus der Anzahl der Fäden ist.

Bei den Polsternen, welche auf diese Weise beobachtet sind, wird man einer Correction der Beobachtungszeiten wegen dieses Instrumentalfehlers nicht bedürfen, weil das arithmetische Mittel der Durchgangszeiten in den beiden Kreislagen bereits frei ist vom Einfluss der Collimation; was aber die Verbesserung der Durchgangszeiten der Zeitsterne anlangt, so ergiebt sich, dass bei einem positiven Zeichen der Differenz: $U - U'$ d. i. der im obigen Sinne verbesserten Beobachtungszeit in der Westlage minus der in der Ostlage für untere Culmination des Polsternes, und bei einem negativen Vorzeichen dieser Differenz bei oberer Culmination, die Correction für Zeitsterne in der Westlage positiv und in der Ostlage negativ zu nehmen ist.

Eine andere sehr bequeme Methode zur Bestimmung der Collimation setzt die Existenz einer Mire oder eines Collimators und eines beweglichen Fadens im Fernrohr voraus; man bestimmt alsdann mit Hülfe des beweglichen Fadens die Distanzen zwischen dem Mittelfaden des Fernrohres und dem Fadenkreuz des Collimators in beiden Lagen des Instrumentes, und führt dieselben positiv ein, wenn der Mittelfaden im geraden astronomischen Fernrohr gesehen von dem Collimator oder der Mire nach der Seite des Kreisendes zu abweicht.

Der Collimationsfehler bezogen auf die Westlage des Instrumentes ergiebt sich dann aus dem Ausdrucke:

$$c = \tfrac{1}{2}\,(e + e')$$

wo e und e' die Distanzen in der West- und Ostlage des Instrumentes bedeuten. Bekanntlich vereinfacht sich diese Methode noch mehr, wenn man zwei Collimatorenfernröhre anwendet, weil man alsdann der Umlegung des Instrumentes überhoben ist.

Ist das Fernrohr mit einem beweglichen Faden nicht versehen, so kann man die Collimation in der Weise bestimmen, dass man in einiger Entfernung vom Instrument eine ein-

getheilte Latte horizontal aufstellt und die Stellung des Mittelfadens innerhalb dieser Theilung in beiden Lagen des Instrumentes abliest. Die Collimation ist alsdann die Hälfte der zwischen beiden Lagen des Mittelfadens beobachteten Scalentheile dividirt durch die Entfernung der Latte vom Instrument.

Ein ferneres Verfahren, mit Hülfe dessen man sehr scharfe Werthe für die Collimation erhält, gründet sich auf die Anwendung des Quecksilberhorizontes, wofür bereits auf S. 48 bei Gelegenheit der Discussion einer der Methoden zur Bestimmung der Neigung die nöthigen Details gegeben sind. Unter Hinweis auf die dort eingeführten Bezeichnungen und unter Berücksichtigung einer Ungleichheit der Zapfen erhält man für den Werth der Collimation den Ausdruck:

$$c = + \tfrac{1}{2} (d' - d) \pm \frac{R - r}{L \sin W}$$

wobei resp. das obere oder das untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem der Zapfen am Kreisende oder an dem entgegengesetzten Ende der dickere ist.

Bei Bestimmung der Collimation nach verschiedenen dieser Methoden wird man oftmals systematische Unterschiede der aus den verschiedenen Verfahrungsweisen hervorgehenden Collimationswerthe finden; der Grund dieser Erscheinung ist im Wesentlichen auf eine Seitenbiegung der Axe zurückzuführen, als einer weiteren Fehlerquelle, deren Einfluss sich in der Regel mit der Wirkung der Collimation vermengt. Insofern der Einfluss dieser Seitenbiegung auf die Lage des Fernrohres gegen den Meridian im Horizont Null, im Zenith und Nadir aber ein Maximum ist, und eine Abweichung des Fernrohres vom Meridian in verschiedenen Zenithdistanzen die Durchgangszeiten im Verhältniss von sec δ ändert, kann man den Einfluss dieser Seitenbiegung auf die Durchgangszeiten allgemein unter der Form darstellen:

$$a \cos z \sec \delta$$

Man erhält daher bei Bestimmung der Collimation in verschiedenen Zenithdistanzen des Fernrohres nicht unmittelbar diese selbst, sondern im Allgemeinen Werthe von der Form:

$$n = c + a \cos z$$

Aus der Gesammtheit derselben kann man alsdann nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe des wahren Collimationsfehlers und der Constanten a ableiten. Man erhält hierfür aus s Gleichungen der obigen Art folgende Ausdrücke:

$$a = \frac{s\,[n \cos z] - [n]\,[\cos z]}{s\,[\cos z \cos z] - [\cos z]\,[\cos z]}$$

$$c = \frac{[n]\,[\cos z \cos z] - [\cos z]\,[n \cos z]}{s\,[\cos z \cos z] - [\cos z]\,[\cos z]}$$

Doch wird man dieses Verfahren nur dann in Anwendung bringen dürfen, wenn der Collimationsfehler sich innerhalb des ganzen Intervalles der hinzugezogenen Bestimmungsreihen als constant erweist.

3. Bestimmung des Azimuths.

Bei Bestimmung dieses Instrumentalfehlers ist eine weit geringere Mannichfaltigkeit der Methoden vorhanden, wie bei Bestimmung der Neigung und der Collimation, insofern man den Werth des Azimuths in absoluter Weise nur durch Combination der Beobachtungen zweier Sterne von verschiedener Declination erhalten kann. Verbessert man die Durchgangszeiten wegen der Neigung der Axe und der Collimation des Fernrohres und reducirt sie wegen des Uhrganges auf ein und dieselbe Zeitepoche, so erhält man für das Azimuth den Ausdruck:

$$k = \frac{(\alpha' - U') - (\alpha - U)}{\cos\varphi} \cdot \frac{\cos\delta\cos\delta'}{\sin(\delta \mp \delta')} = \frac{(\alpha' - U') - (\alpha - U)}{\cos\varphi} \cdot \frac{1}{\tang\delta \mp \tang\delta'}$$

wobei das obere Vorzeichen zu nehmen ist, wenn der mit Index versehene Stern in oberer Culmination, und das untere, wenn derselbe in unterer Culmination beobachtet worden ist, während für den anderen Stern stets die Beobachtung in oberer Culmination vorausgesetzt ist. Das Vorzeichen der Correction für Zeitsterne hängt lediglich vom Vorzeichen des Ausdrucks: $(\alpha' - U') - (\alpha - U)$ ab; ist dieses bei Beobachtung des ersten Sternes resp. in oberer oder in unterer Culmination negativ oder positiv, so ist der absolute Werth der Correction an die Beobachtungszeiten der Zeitsterne mit positivem Vorzeichen anzubringen.

Es wird sich jetzt um Entscheidung der Frage handeln, wie man die Declination der beiden Sterne wählen muss, um eine möglichst scharfe Bestimmung des Azimuths zu erhalten. In dieser Beziehung hat man gewöhnlich nur auf die Grösse des Factors: $\frac{1}{\tang\delta \mp \tang\delta'}$ Rücksicht genommen und gelangt alsdann zu dem Resultat, dass die schärfste Bestimmung des Azimuths aus der Combination zweier Circumpolarsterne hervorgehe, von denen der eine in oberer und der andere in unterer Culmination beobachtet wird. Jedoch ist hierbei vernachlässigt, dass in dem anderen Factor: $(\alpha' - U') - (\alpha - U)$ ein Element von sehr verschiedenem Grade der Sicherheit liegt, insofern die Fehler, welche aus der ungenauen Kenntniss der Neigung und der Collimation entspringen, sowie die Fehler in der Beobachtung der Fadendurchgänge selbst und in der Kenntniss der angewendeten Rectascensionen sich sämmtlich sehr bedeutend vergrössern in dem Maasse, als sich der Stern dem Pole nähert. Aus diesem Grunde soll hier auf alle diese Fehlerquellen Rücksicht genommen und diejenige Combination der Sterne ermittelt werden, welche unter Wirkung aller dieser Umstände die sicherste Bestimmung des Azimuths gewährt. Mit Rücksicht auf den speciellen Fall der Längenbestimmungen wird man bei einem der beiden Sterne den Einfluss einer ungenauen Kenntniss der Collimation vernachlässigen können, weil man hierbei denjenigen Polstern zur Bestimmung des Azimuths hinzuziehen wird, aus welchem die Collimation ermittelt wurde; da aber in Mitten dieses Sterndurchganges das Instrument umgelegt ist, so wird ein Fehler in der Kenntniss der Collimation bei der einen Hälfte der Fäden mit positivem, bei der anderen mit negativem Vorzeichen eingehen, im Mittel also verschwinden. Man wird demnach für die scheinbaren Rectascensionen der beiden Sterne folgende Ausdrücke erhalten:

1. Stern: $\left\{\begin{array}{l}\text{obere Culmination:}\\ \text{untere} \quad » \quad :\end{array}\right.$ $\alpha' = U' + dU + iI' + kK'$

2. Stern: obere Culmination: $\alpha = U + dU + iI + kK + cC.$

Aus der Verbindung beider ergiebt sich:

$$k = \frac{(\alpha' - U') - (\alpha - U)}{K' - K} + i\,\frac{I - I'}{K' - K} + c\,\frac{C}{K' - K}$$

Führt man nun für den wahrscheinlichen Fehler eines Fadendurchganges den Ausdruck: $\sqrt{a^2 + b^2 \sec^2 \delta}$ ein, ferner für den wahrscheinlichen Fehler einer Rectascension: $A \sec \delta$ und nimmt man an, dass beide Sterne an je n Fäden beobachtet sind, so erhält man für den wahrscheinlichen Fehler von: $(\alpha' - U') - (\alpha - U)$ den Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{2a^2 + (nA^2 + b^2)(\sec^2 \delta + \sec^2 \delta')}{n}}$$

Da ferner:

$$\frac{1}{K' - K} = \frac{\cos \delta \cos \delta'}{\cos \varphi \sin (\delta \mp \delta')} = \frac{1}{\cos \varphi\,(\tang \delta \mp \tang \delta')} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{obere Culmination}\\ \text{untere} \quad »\end{array}\right.$$

$$I - I' = \frac{\sin \varphi \sin (\delta - \delta')}{\cos \delta \cos \delta'} = \sin \varphi\,(\tang \delta - \tang \delta') \quad \text{obere Culmination}$$

$$I - I' = \sin \varphi\,\frac{\sin (\delta + \delta')}{\cos \delta \cos \delta'} = \sin \varphi\,(\tang \delta + \tang \delta') \quad \text{untere Culmination}$$

$$C = \sec \delta$$

so ergeben sich für die obigen Factoren die Werthe:

$$\frac{I - I'}{K' - K} = \tang \varphi\,[1] \quad \left\{\begin{array}{l}\text{obere Culmination}\\ \text{untere} \quad »\end{array}\right.$$

$$\frac{C}{K' - K} = \frac{\cos \delta'}{\cos \varphi \sin (\delta \mp \delta')} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{obere Culmination}\\ \text{untere} \quad »\end{array}\right.$$

demnach resultirt für die Gesammtunsicherheit von k der Ausdruck:

$$r_k^2 = \frac{2a^2}{n \cos^2 \varphi} \cdot \frac{\cos^2 \delta \cos^2 \delta'}{\sin^2 (\delta \mp \delta')} + \frac{nA^2 + b^2}{n \cos^2 \varphi} \cdot \frac{\cos^2 \delta + \cos^2 \delta'}{\sin^2 (\delta \mp \delta')} + r_i^2 \tang^2 \varphi + r_c^2\,\frac{\cos^2 \delta'}{\cos^2 \varphi \sin^2 (\delta \mp \delta')}$$

wobei das obere Vorzeichen zu nehmen ist, wenn beide Sterne in oberer Culmination, und das untere, wenn der mit Index versehene Stern in der unteren und der andere in der oberen Culmination beobachtet wurde.

Mit Hülfe dieser Formeln wird man in jedem gegebenen Falle entscheiden können, welche Combination von Sternen die sicherste Bestimmung des Azimuths ergiebt. Unter Annahme einiger Zahlwerthe, wie sie der Mehrzahl der bisher ausgeführten Längenbestimmungen nahezu entsprechen, nämlich $a = 0^s\!.07$, $b = 0^s\!.0318$ (100fache Vergrösserung), $A = 0^s\!.02$, $r_i = 0^s\!.02$, $r_c = 0^s\!.02$, $n = 10$, $\varphi = 52^0$ sind im Folgenden einige specielle Werthe der zu erwartenden Unsicherheit in k gegeben:

---

1 Diese sehr einfache Relation ergiebt, dass einer Aenderung Δi in der Annahme des Werthes der Neigung eine Aenderung von $\Delta i \tang \varphi$ im Azimuth entspricht. Substituirt man diese Werthe von Δi und Δk in die Gleichung für die Zeitsterne, so folgt, dass überhaupt eine Aenderung Δi in der Annahme der Neigungen der einen Station eine Aenderung der Längendifferenz im Betrage von $\pm \Delta i \sec \varphi$ erzeugt.

Beide Sterne in oberer Culmination.

Declination	−30°	0°	+30°	+60°
80° 0′	0ˢ.044	0ˢ.047	0ˢ.051	0ˢ.065
85° 0′	0.044	0.045	0.047	0.051
88° 40′	0.044	0.044	0.045	0.046

Stern I in oberer Culmination, Stern II in unterer Culmination.

Declination	−30°	0°	+30°	+60°	+80°	+85°	+88° 40′
88° 40′	0ˢ.045	0ˢ.045	0ˢ.044	0ˢ.043	0ˢ.041	0ˢ.040	0ˢ.040
85° 0′	0.047	0.045	0.044	0.042	0.039	0.040	0.047
80° 0′	0.051	0.047	0.044	0.041	0.040	0.043	0.050

Die letzteren Werthe, welche der Combination zweier Circumpolarsterne entsprechen, können dadurch, dass man auch im 2. Stern umlegt und auf diese Weise die Unsicherheit der Collimationsbestimmung eliminirt, auf folgende Grössen herabgebracht werden:

Declination	+80°	+85°	+88° 40′
88° 40′	0ˢ.041	0ˢ.039	0ˢ.036
85° 0′	0.038	0.036	0.039
80° 0′	0.037	0.038	0.041

Aus dieser Uebersicht geht hervor, dass man in diesem gegebenen Falle die schärfste Bestimmung des Azimuths aus der Combination zweier Circumpolarsterne von nahe gleicher Declination, aber in verschiedenen Culminationen erhält. Dagegen ist es nicht unbedingtes Erforderniss, dass dieselben so nahe als möglich am Pole sind, da man aus der Combination zweier Polsterne von 80° Declination das Azimuth fast ebenso genau erhält, als aus 2 Sternen in der Poldistanz des Polarsternes. Es wird sich hierbei empfehlen, in der Mitte des Durchganges jeder dieser Sterne das Instrument umzulegen. Zugleich geht aber aus den obigen Zahlwerthen hervor, dass man das Azimuth aus der Combination eines Polsternes und eines Südsternes fast ebenso genau erhält, als aus der Combination zweier Circumpolarsterne; man wird in diesem Falle die sichersten Werthe bekommen, wenn man bei oberer Culmination des Polsternes einen Südstern möglichst nahe am Horizont wählt, während man bei unterer Culmination des Polsternes einen Stern von möglichst grosser nördlicher Declination zu nehmen hat. Doch wird man im ersteren Falle keinen irgend merklichen Fehler begehen, wenn man anstatt des Sternes am Südhorizont einen Stern in der Nähe des Aequators nimmt, da der sehr geringe Zuschuss an Genauigkeit, welcher nach den obigen Zahlwerthen für Sterne in der Nähe des

Südhorizontes stattfindet, dadurch illusorisch wird, dass für Sterne ganz in der Nähe des Horizontes der wahre Werth der Beobachtungsfehler infolge Unruhe der Bilder grösser ausfällt, als dies auf Grund der Formel: $\sqrt{a^2 + b^2 \sec^2 \delta}$ zu erwarten ist.

Eine Verschärfung in der Bestimmung des Azimuths kann man auch auf die Weise bewirken, dass man die Durchgangszeit eines Polsternes mit denen mehrerer Zeitsterne combinirt; es resultiren alsdann für die wahrscheinlichsten Werthe des Azimuths und des Uhrstandes, da jeder Stern eine Gleichung liefert von der Form:

$$\alpha - U = dU + kK$$

die Ausdrücke:

$$k = \frac{s\,[K(\alpha - U)] - [\alpha - U]\,[K]}{s\,[KK] - [K]\,[K]}$$

$$dU = \frac{[KK]\,[\alpha - U] - [K]\,[K(\alpha - U)]}{s\,[KK] - [K]\,[K]}$$

wo s die Anzahl der Gleichungen bedeutet.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Werthe U bereits corrigirt sind wegen der Neigung der Axe und des Collimationsfehlers, sowie dass sie mit Hülfe eines angenäherten Uhrganges auf eine und dieselbe Zeitepoche reducirt sind. Doch sei hier darauf hingewiesen, dass durch die Anwendung der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf diesen Fall die Rechnung sehr erheblich vergrössert, der Genauigkeitsgrad aber nur in geringem Maasse erhöht wird; es erscheint aus diesem Grunde rathsamer, in der Weise zu verfahren, dass man die arithmetischen Mittel der Werthe: $\alpha - U$ und K aller hinzugezogenen Zeitsterne bildet und aus ihnen die zweite Gleichung formirt. Doch kann man auch auf diesem Wege nur eine geringe Erhöhung des Genauigkeitsgrades bewirken, wie dies aus den Erfahrungen der bisherigen Längenbestimmungen deutlich hervorgeht, insofern dieselben übereinstimmend[1] darauf hindeuten, dass in der Bestimmung des Azimuths im Vergleich zu den Ermittlungen der Neigung und der Collimation ein Element ziemlicher Unsicherheit gegeben ist. Man wird daher zu anderen Hülfsmitteln seine Zuflucht nehmen müssen, wenn man eine irgend erhebliche Vermehrung der Genauigkeit bewirken will; in dieser Beziehung ist darauf hinzuweisen, dass man durch wiederholte Einstellungen des Fernrohres auf eine Mire oder einen Collimator wesentliche Momente, sowohl zur Herleitung des absoluten Azimuths, als auch vor allen zur Bestimmung der Aenderungen erlangen kann, welche das Azimuth im Laufe einer Beobachtungsreihe erleidet. Das Erstere setzt die genaue Kenntniss des Azimuths der Mire voraus; dieselbe wird aber leicht in der Weise zu erreichen sein, dass man ausser der Beobachtungszeit für die eigentliche Längenbestimmung öfterer die Durchgänge von Polsternen nach der Methode gewöhnlicher Azimuthbestimmungen mit dieser Mire verbindet. Bezeichnet man alsdann das absolute Azimuth der Mire mit a, das wahre Azimuth des Instrumentes aber mit k, ferner die mittelst des beweglichen Fadens gemessenen Distanzen der Mire vom Mittelfaden mit m, indem man dieselben mit positivem Vorzeichen einführt, wenn die Mire im geraden astronomischen Fernrohr gesehen

1 Vergleiche Abschnitt V.

westlich vom Faden erscheint, und setzt man der grösseren Allgemeinheit halber voraus, dass sich die Mire nicht im Horizont des Instrumentes, sondern in der Zenithdistanz z befindet, so erhält man die Relation:

$$k \sin z = a \sin z + m + c + i \cos z$$ [1]

und nach der Umlegung des Instrumentes:

$$k \sin z = a \sin z + m' - c + i' \cos z$$

demnach:

$$k = a + \frac{m + m'}{2 \sin z} + \frac{i + i'}{2} \operatorname{cotg} z$$

Eine Correction wegen Ungleichheit der Zapfen ist in diesem Falle nicht erforderlich, insofern dieselbe bereits durch Einführung der wahren Neigungswerthe für jede der beiden Kreislagen: i und i' in Berücksichtigung gezogen ist. Befindet sich die Mire oder der Collimator im Horizont des Instrumentes, so vereinfacht sich der Ausdruck zu folgendem:

$$k = a + \tfrac{1}{2} (m + m')$$

Wie schon im Obigen angedeutet, wird die wiederholte Anwendung dieses Verfahrens in dem speciellen Falle der Längenbestimmungen wesentlich zur Vermehrung der Genauigkeit beitragen; es wird jedoch empfehlenswerth sein, die Kenntniss des Azimuths nicht allein auf dieses Verfahren zu begründen, sondern dafür Sorge zu tragen, dass durch einige directe Bestimmungen des Azimuths innerhalb einer jeden Beobachtungsreihe eine strenge Controle ausgeübt wird.

4. Bestimmung von n und m.

Bedient man sich zur Verbesserung der Beobachtungszeiten wegen der Instrumentalfehler nicht der Mayer'schen, sondern der Bessel'schen Formel, so bedarf man der Kenntniss der Grösse n, welche analog dem Azimuth direct aus den Beobachtungen erlangt wird. Reducirt man die Durchgangszeiten zweier Sterne mittelst des Uhrganges auf ein und dieselbe Zeitepoche und verbessert dieselben wegen der Collimation der optischen Axe des Fernrohres, so erhält man für n den Ausdruck:

$$n = \frac{(\alpha - U) - (\alpha' - U')}{\operatorname{tang} \delta \mp \operatorname{tang} \delta'}$$

wobei das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem der mit Index versehene Stern resp. in oberer oder in unterer Culmination beobachtet worden ist.

In analoger Weise wie bei Bestimmung des Azimuths findet sich für das Quadrat des wahrscheinlichen Fehlers von n der Ausdruck:

$$r_n^2 = \frac{2a^2}{n} \cdot \frac{\cos^2 \delta \cos^2 \delta'}{\sin^2 (\delta \mp \delta')} + \frac{n A^2 + b^2}{n} \cdot \frac{\cos^2 \delta + \cos^2 \delta'}{\sin^2 (\delta \mp \delta')} + r_c^2 \frac{\cos^2 \delta'}{\sin^2 (\delta \mp \delta')}$$

---

1 Hierbei ist vorausgesetzt, dass sich die Mire im Norden des Instrumentes befindet.

Bei Ableitung dieses Werthes ist ganz entsprechend der Ableitung des wahrscheinlichen Fehlers im resultirenden Azimuth die Voraussetzung gemacht, dass der mit Index versehene Stern derjenige Polstern sei, welcher zur Ermittlung der Collimation gedient hat, dass also die Durchgangszeit dieses Sternes frei ist von der Unsicherheit in der Bestimmung der Collimation.

Durch Einsetzung der speciellen Zahlwerthe wird man in jedem gegebenen Falle die günstigste Combination der Sterne ermitteln können; man erhält z. B. unter Substitution der auf Seite 53 in Anwendung gebrachten Zahlwerthe, welche der Mehrzahl der bisher ausgeführten Längenbestimmungen ziemlich entsprechen werden, folgende wahrscheinliche Fehler von *n*:

Beide Sterne in oberer Culmination.

Declination	−30°	0°	+30°	+60°
80° 0′	0ˢ.022	0ˢ.024	0ˢ.027	0ˢ.037
85° 0′	0.022	0.023	0.024	0.027
88° 40′	0.022	0.022	0.023	0.023

Stern I in oberer Culmination, Stern II in unterer Culmination.

Declination	−30°	0°	+30°	+60°	+80°	+85°	+88° 40′
88° 40′	0ˢ.023	0ˢ.022	0ˢ.022	0ˢ.022	0ˢ.020	0ˢ.019	0ˢ.019
85° 0′	0.024	0.023	0.022	0.020	0.018	0.019	0.024
80° 0′	0.027	0.024	0.022	0.020	0.019	0.022	0.027

In dem speciellen Falle der Combination zweier Circumpolarsterne kann man auch hier den Fehler noch dadurch erheblich verkleinern, dass man auch während der Culmination des 2. Sternes umlegt und dadurch die Unsicherheit in der Bestimmung der Collimation auch für diesen Stern eliminirt; man erhält alsdann für den wahrscheinlichen Fehler die Werthe:

Declination	+80°	+85°	+88° 40′
88° 40′	0ˢ.020	0ˢ.018	0ˢ.016
85° 0′	0.017	0.016	0.017
80° 0′	0.016	0.017	0.020

Aus dem Gange dieser Werthe ersieht man, dass die schärfste Bestimmung von *n* aus der Combination zweier Circumpolarsterne von nahe gleicher Declination aber in entgegengesetzter Culmination erlangt wird; jedoch zeigt sich, dass man aus der Combination eines Polsternes mit einem Aequatorstern Werthe für *n* erhält, welche an Genauigkeit nur wenig den auf ersterem Wege erlangten nachstehen. Auch hier wird man eine, wenn auch nur geringe Vermehrung des Genauigkeitsgrades dadurch bewirken können, dass man nicht blos 2, sondern eine grössere Zahl von Sternen mit einander combinirt und aus der Gesammtheit derselben den wahrscheinlichsten Werth von *n* nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt.

Wenn auf diese Weise der Werth von n bestimmt ist, so findet sich m unmittelbar aus der Relation:

$$m = i \sec \varphi - n \operatorname{tang} \varphi$$

Für den wahrscheinlichen Fehler von m erhält man den Ausdruck:

$$r_m^2 = r_i^2 \sec^2 \varphi + r_n^2 \operatorname{tang}^2 \varphi = r_i^2 + (r_i^2 + r_n^2) \operatorname{tang}^2 \varphi$$

und wenn man auf Grund der obigen Ergebnisse für $\varphi = 52^0$: $r_i = 0^s02$ und $r_n = 0^s023$ einsetzt:

$$r_m = \pm\ 0^s044.$$

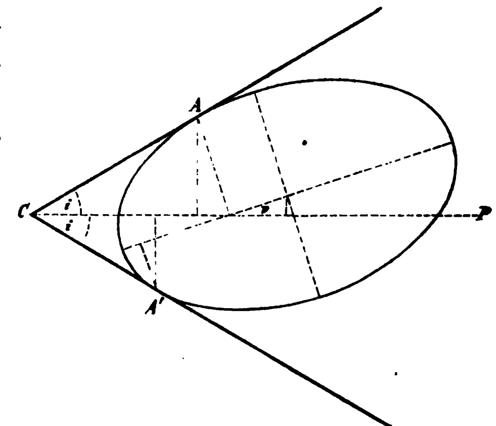
Nachdem im Vorigen die Methoden angegeben sind, mit Hülfe deren man zur Kenntniss der Instrumentalfehler gelangt, sei hier noch darauf hingewiesen, dass diese Werthe im Verlauf eines Beobachtungsabendes zu wiederholten Malen bestimmt werden müssen, um entweder Gewissheit darüber zu erhalten, dass dieselben keinen periodischen Aenderungen unterworfen sind, oder, wenn dies der Fall sein sollte, um diese Aenderungen ihrem Betrage nach ermitteln und in Rechnung ziehen zu können. Je nachdem der eine oder der andere dieser Fälle eintritt, wird man entweder sämmtliche Bestimmungen eines Abendes zu einem Mittelwerth vereinigen, oder aus der Gesammtheit der Bestimmungen für jeden einzelnen Stern die Werthe der Instrumentalfehler interpoliren. Doch liegt in der Entscheidung der Frage, ob während des Verlaufes eines Abendes periodische Aenderungen stattfinden oder ob die Schwankungen nur unvermeidlichen Beobachtungsfehlern zuzuschreiben seien, eine gewisse Willkühr; es ist daher noch zweckmässiger, die Sterne gruppenweise abzutheilen, für jede Gruppe die Instrumentalfehler zu bestimmen und diese Werthe zur Reduction dieser ganzen Sterngruppe zu verwenden.

Ausser den Correctionen wegen der Instrumentalfehler ist noch die Verbesserung wegen der Seitenbiegung der Axe anzubringen, über welche bereits Seite 51 das Nöthige mitgetheilt ist.

Ferner sei hier noch auf eine Fehlerquelle aufmerksam gemacht, welche den Genauigkeitsgrad der Reduction auf den Meridian erheblich afficirt: es ist dies die unregelmässige Gestalt der Zapfen, welche zur Folge hat, dass das Instrument bei verschiedenen Zenithdistanzen des Fernrohres Variationen in Neigung und in Azimuth erleidet.

Bisher hat man bei der Reduction der Beobachtungen diese Schwankungen selten in Berücksichtigung gezogen, obwohl dieselben unter Umständen zu ziemlich erheblichen Grössen anwachsen können; hauptsächlich wohl deshalb, weil es an einer bequemen Methode zur numerischen Bestimmung dieser Variationen fehlte. Erst in neuerer Zeit hat man an einigen Meridianinstrumenten ersten Ranges diese Elemente auf die Weise zu bestimmen gesucht, dass man den Mittelpunkt des Zapfenendes durch eine Marke kenntlich machte und die Bewegung dieser Marke innerhalb des Fadennetzes eines darauf gerichteten Fernrohres beobachtete. Diese Methode gewährt den Vortheil, dass sie unmittelbar Aufschluss über die Bewegung der Axe des Instrumentes giebt; aber es ist hiermit der Nachtheil verbunden, dass die Lösung der Aufgabe auf die Messung äusserst kleiner Grössen zurückgeführt wird und daher der Genauigkeitsgrad ziemlich beschränkt ist. Aus diesem Grunde sei hier ein weiteres Verfahren angegeben,

mit Hülfe dessen man diese Correctionsgrössen schnell und sicher ermitteln kann. Geht man nämlich von der Voraussetzung aus, dass die Querschnitte der Zapfen nicht Kreise, sondern Ellipsen von beliebiger Excentricität und beliebiger Lage der grossen Axen seien — welche Supposition gegenüber der ersteren eine ungleich grössere Mannichfaltigkeit der Formen gewährt —: so wird man die Lösung der Aufgabe darauf zurückführen können, die Bewegung des Mittelpunktes einer Ellipse zu ermitteln, welche entsteht, wenn sich die Ellipse in einem Winkel dergestalt dreht, dass sie fortwährend mit den beiden Schenkeln desselben in Berührung ist. Für den speciellen Fall eines Lagerwinkels gleich 90° ist diese Aufgabe bereits von BESSEL[1] gelöst; da jedoch gerade in diesem singulären Falle die zu entwickelnde Methode zur Bestimmung der Variationen in Neigung und in Azimuth verborgen bleibt, so möge hier der allgemeinere Fall eines beliebigen Lagerwinkels behandelt werden.



Bezeichnet man den halben Winkel der beiden Lagerflächen mit i und nennt man die rechtwinkligen Coordinaten der beiden Tangentialpunkte A und A' bezogen auf C als Coordinatenanfang und CP als XAxe, resp.

$$X,\ Y \text{ und } X',\ Y'$$

so gelten die Relationen:

$$Y = X \operatorname{tang} i; \quad Y' = - X' \operatorname{tang} i$$

Geht man nun von diesem Coordinatensystem zu demjenigen über, dessen X- und YAxe resp. mit der grossen und kleinen Axe der Ellipse zusammenfällt, so kommen die Transformationsformeln in Anwendung, welche für den Uebergang von einem Coordinatensystem zu einem anderen gelten, dessen XAxe mit der des ursprünglichen Systems den Winkel ν einschliesst und dessen Coordinatenanfang in Bezug auf das alte System die Coordinaten $+\alpha$ und $+\beta$ besitzt:

$$X = \alpha + x \cos \nu - y \sin \nu$$
$$Y = \beta + x \sin \nu + y \cos \nu.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man nach entsprechender Vereinfachung:

$$\beta \cos i - \alpha \sin i + x \sin(\nu - i) + y \cos(\nu - i) = 0$$
$$\beta \cos i + \alpha \sin i + x' \sin(\nu + i) + y' \cos(\nu + i) = 0$$

Führt man nun die Bedingung ein, dass der Querschnitt des Zapfens eine Ellipse ist, so gilt die Beziehung:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = (1 - ee)(a^2 - x^2)$$

aus welcher man durch Differentiation die Ausdrücke erhält:

$$\frac{dy}{dx} = -x \sqrt{\frac{1-ee}{a^2 - x^2}}; \qquad \frac{dy'}{dx'} = -x' \sqrt{\frac{1-ee}{a^2 - x'^2}}$$

---

1 Astronomische Beobachtungen in Königsberg. Abth. I. 1815. pag. XI—XII.

Da ferner die Neigungswinkel der beiden Tangenten gegen die grosse Axe der Ellipse resp. $\nu - i$ und $\nu + i$ sind, so gelten die Beziehungen:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}(\nu - i)\ ; \qquad \frac{dy'}{dx'} = \operatorname{tang}(\nu + i)$$

und man erhält durch Gleichsetzung dieser Werthe die Ausdrücke:

$$x^2 = \frac{a^2}{r^2}\sin^2(\nu - i)\ ; \qquad x'^2 = \frac{a^2}{r'^2}\sin^2(\nu + i)$$

worin: $r^2 = 1 - ee\cos^2(\nu - i)$; $r'^2 = 1 - ee\cos^2(\nu + i)$ bezeichnet.

Alsdann ergeben sich die Werthe y und y' auf Grund der Relation: $y^2 = (1 - ee)(a^2 - x^2)$ und unter theilweiser Restitution der Werthe r und r':

$$y^2 = \frac{a^2(1-ee)^2}{r^2}\cos^2(\nu - i)\ ; \qquad y'^2 = \frac{a^2(1-ee)^2}{r'^2}\cos^2(\nu + i)$$

Führt man diese Werthe: x, x', y und y' in die obigen Gleichungen ein, so erhält man:

$$\beta\cos i - \alpha\sin i + \frac{a}{r}\sin^2(\nu - i) + \frac{a(1-ee)}{r}\cos^2(\nu - i) = 0$$

$$\beta\cos i + \alpha\sin i - \frac{a}{r'}\sin^2(\nu + i) - \frac{a(1-ee)}{r'}\cos^2(\nu + i) = 0$$

welche sich vereinfachen zu den Ausdrücken:

$$\beta\cos i - \alpha\sin i + ar = 0$$
$$\beta\cos i + \alpha\sin i - ar' = 0$$

so dass für die Variationen α und β in Neigung und Azimuth die Werthe resultiren:

$$\alpha = \frac{a}{2\sin i}(r' + r)\ ; \qquad \beta = \frac{a}{2\cos i}(r' - r)$$

Mit Vernachlässigung der 4. und höheren Potenzen der Excentricität ergeben sich für r und r' die Näherungswerthe:

$$r = 1 - \frac{ee}{2}\cos^2(\nu - i)\ ; \qquad r' = 1 - \frac{ee}{2}\cos^2(\nu + i)$$

folglich:

$$r' + r = 2 - \frac{ee}{2}(1 + \cos 2\nu\cos 2i)\ ; \qquad r' - r = \frac{ee}{2}\sin 2\nu\sin 2i$$

Setzt man diese Werthe in die Ausdrücke für α und β ein, so erhält man die Relationen:

$$\alpha = \frac{a}{\sin i}\left(1 - \frac{ee}{4}\right) - \frac{a\,ee}{4}\cdot\frac{\cos 2i}{\sin i}\cdot\cos 2\nu$$

$$\beta = \frac{a\,ee}{2}\sin i\cdot\sin 2\nu$$

oder wenn man in den vom Drehungswinkel abhängigen Gliedern anstatt der Excentricität den Werth der halben kleinen Axe einführt, die sehr einfachen Beziehungen:

$$\alpha = \frac{a}{\sin i}\left(1 - \frac{ee}{4}\right) - \frac{a-b}{2}\cdot\frac{\cos 2i}{\sin i}\cdot\cos 2\nu$$

$$\beta = (a - b)\sin i\sin 2\nu$$

Das constante Glied im Ausdrucke für α bezieht sich darauf, dass diese Coordinate vom Durchschnittspunkt der Lagerkanten ab gerechnet ist; beschränkt man sich blos auf die Variationen in Neigung und Azimuth, welche allein für den vorliegenden Fall von Interesse sind, so erhält man hierfür die Ausdrücke:

$$\text{Variation in Neigung:} \quad \alpha = -\frac{a-b}{2} \cdot \frac{\cos 2\,i}{\sin i} \cdot \cos 2\,\nu$$

$$\text{Variation in Azimuth:} \quad \beta = (a-b) \sin i \sin 2\,\nu$$

Da in diesen Ausdrücken nur der doppelte Drehungswinkel des Fernrohrs enthalten ist, so folgt, dass der Mittelpunkt des Zapfens während einer vollständigen Umdrehung desselben um 360^0 zwei Mal die durch die obigen Ausdrücke angegebene Curve durchläuft, dass also:

$$\varphi(\nu) = \varphi(180^0 + \nu) \quad \text{ist.}$$

Ferner ergiebt sich, dass für den singulären Fall: $2\,i = 90^0$ bis incl. Grössen von der 3. Ordnung der Excentricität die Variation in Neigung Null ist, während diejenige in Azimuth von der 2. Potenz der Excentricität abhängig bleibt; es geht hieraus unter der Voraussetzung elliptischer Zapfen die Unmöglichkeit hervor, im Falle eines Lagerwinkels von 90^0 und eines gleich grossen Winkels der Aufsatzflächen der Niveauträger durch Nivellement der Axe in verschiedenen Zenithdistanzen des Fernrohres irgend Aufschluss über die Gestalt der Zapfen zu erhalten. Da diesen Bedingungen die Mehrzahl der Instrumente sich mehr oder weniger nähern, so wird man diesen Satz als ziemlich allgemein gültig betrachten können; es bedarf jedoch nur einer geringen Modification der Niveauträger, um dennoch durch fortgesetzte Nivellements in verschiedenen Zenithdistanzen des Fernrohres nicht allein vollständigen Aufschluss über die Variationen in Neigung, sondern auch in Azimuth zu erhalten. Bezeichnet man nämlich diejenige Amplitude in Neigung, welche einem Drehungswinkel des Fernrohres angehört, der um 45^0 kleiner ist, als derjenige, für welchen man die Amplitude in Azimuth ermitteln will, mit α_{-45^0}, so erhält man für β den Ausdruck:

$$\beta = -\alpha_{-45^0} \cdot \frac{1-\cos 2\,i}{\cos 2\,i}$$

so dass man also für ein gegebenes Instrument die beobachteten Variationen in Neigung nur mit einem constanten Factor zu multipliciren hat, um diejenigen in Azimuth zu erhalten. Es handelt sich nur darum, die Variationen in Neigung unter Umständen zu bestimmen, wo dieselben zu sehr merklichen Grössen anwachsen; man erreicht dies, wenn man mit einem Niveau nivellirt, dessen Aufsatzflächen einen möglichst kleinen Winkel mit einander bilden. Bereits bei einem Winkel von 48^0 sind die Variationen in Neigung doppelt so gross als diejenigen in Azimuth, so dass man schon in diesem Falle über die Grösse der letzteren durch Nivellement in verschiedenen Zenithdistanzen hinreichend Aufschluss erhalten wird. Mit Hülfe der oben gegebenen Ausdrücke, welche zunächst nur für einen elliptischen Zapfen gelten, jedoch leicht auch auf die Combination zweier elliptischer Zapfen ausgedehnt werden können, kann man aus den durch Nivellement erhaltenen α und β, welche Functionen des Lagerwinkels und des Winkels

der Aufsatzflächen der Niveauträger sind, diejenigen Werthe ermitteln, welche lediglich vom Lagerwinkel abhängig sind, und demgemäss die wahren Neigungen und Azimuthe bestimmen.

Diese ganze Betrachtung gilt allerdings nur unter der Voraussetzung elliptischer Zapfen; aber schon oben ist darauf hingewiesen worden, dass diese Annahme wegen der unbestimmt gelassenen Excentricität und der Lage der grossen Axe der Wahrheit ungleich näher kommen wird, als die Annahme kreisförmiger Querschnitte. Für den speciellen Zweck der Längenbestimmung kann man den schädlichen Einfluss dieser Variationen in Neigung und Azimuth auf den Betrag der Längendifferenz durch geeignete Anordnung der Beobachtungen sehr vermindern, indem man die Südsterne in denselben Zenithdistanzen annimmt, wie die Polsterne, aus welchen man die Instrumentalfehler ermittelt, und die Beobachtungen möglichst symmetrisch auf die beiden Kreislagen des Instrumentes vertheilt.

Abschnitt V.

Genauigkeitsgrad der astronomischen Zeitbestimmung.

Bei Beurtheilung des Genauigkeitsgrades dieser verbesserten Durchgangszeiten ist zu berücksichtigen, dass in der Reduction auf den Meridian ein erhebliches Element der Unsicherheit gegeben ist, welches insbesondere aus der unzureichenden Kenntniss der Reductionselemente hervorgeht. Um wenigstens einen ungefähren Ueberblick über den Betrag dieser Unsicherheit zu erhalten, sind im Folgenden die wahrscheinlichen Fehler berechnet, mit denen behaftet die Reductionselemente innerhalb früherer Längenbestimmungen ermittelt worden sind; dieselben sind in der Weise bestimmt, dass die im Laufe eines Abendes erhaltenen Werthe für: i, c und k zu je einem Mittelwerth vereinigt und die Abweichungen der Einzelwerthe von diesen Mitteln als unvermeidliche Beobachtungsfehler angesehen wurden. Da sich hierzu nur diejenigen Beobachtungsreihen verwerthen liessen, bei denen sich innerhalb eines Abendes keine periodischen Schwankungen zeigten, oder bei denen dieselben der Zeit proportional verliefen, in welchem Falle dieselben eliminirt werden konnten, so ist eine gewisse Willkühr in der Auswahl des Materials unvermeidlich gewesen; doch ist hierbei sorgfältig zu Werke gegangen, so dass zu erwarten steht, dass die aus diesem Umstand hervorgehende Unsicherheit der Werthe auf wenige Tausendel Secunden beschränkt sein wird.

1) Wahrscheinlicher Fehler einer Neigungsbestimmung mit Hülfe des Niveaus:

Längenbestimmung:	Leipzig — Gotha:	Gotha:	± 0ˢ020	(1ᵖ = 0ˢ075)
		Leipzig:	± 0.025	(1ᵖ = 0.11)
	Berlin — Leipzig:	Leipzig:	± 0.028	(1ᵖ = 0.11)
		Berlin:	± 0.018	(1ᵖ = 0.066)
	Göttingen — Dangast — Leiden:	Leiden:	± 0.029	(1ᵖ = 0.128)
		Dangast:	± 0.034	(1ᵖ = 0.097)
		Göttingen:	± 0.015	(1ᵖ = 0.103)
	Berlin — Lund:	Lund:	± 0.016	(1ᵖ = 0.119)
		Berlin:	± 0.015	(1ᵖ = 0.100)
	Altona — Schwerin:	Reps. Instr.:	± 0.020	(1ᵖ = 0.086)
	Berlin — Wien:	Berlin:	± 0.024	(1ᵖ = 0.097)

2) Wahrscheinlicher Fehler einer Bestimmung der Collimation durch Polsternbeobachtung mit Umlegung:

Längenbestimmung:			Vergrösserung	Anzahl der Fäden in jeder Lage
Leipzig — Gotha:	Gotha:	± 0ˢ017	126	8.0
	Leipzig:	± 0.016	104	10.8
Berlin — Leipzig:	Leipzig:	± 0.020	100	7.6
	Berlin:	± 0.022	117	3.5
Berlin — Wien:	Wien:	± 0.022	88	6.0
	Berlin:	± 0.024	88	5.5
Berlin — Lund:	Lund:	± 0.039	88	4.6
	Berlin:	± 0.019	88	4.9

3) Wahrscheinlicher Fehler einer Bestimmung des Azimuths durch Combination des zur Collimationsbestimmung verwendeten Polsternes mit einem oder mehreren Südsternen:

Längenbestimmung:			Vergrösserung	Zahl d. Fäden
Leipzig — Gotha:	Gotha:	± 0ˢ053	126	16
Berlin — Leipzig:	Leipzig:	± 0.085	100	15
	Berlin:	± 0.049	117	7
Russische Längenbest.:	Berlin:	± 0.047	88	
Berlin — Wien:	Wien:	± 0.037	88	12
	Berlin:	± 0.047	88	11
Altona — Schwerin:	Reps. Instr.:	± 0.08	44	
	Pist. Instr.:	± 0.07	52	

Im vorliegenden Falle ist ausdrücklich davon abgesehen worden, diejenigen Bestimmungen der Instrumentalfehler mit in diese Untersuchungen hineinzuziehen, welche an

Meridianinstrumenten ersten Ranges ausgeführt sind, weil es hier speciell darauf ankam, die Sicherheit in der Bestimmung der Instrumentalfehler für diejenigen Instrumente zu ermitteln, welche zu Längenbestimmungen in der Regel[1] Verwendung finden. Für Instrumente dieser Art wird man daher als Mittelwerth für den wahrscheinlichen Fehler einer Bestimmung:

der Neigung: ± 0ˢ02
der Collimation: ± 0ˢ02
des Azimuths: ± 0ˢ045

betrachten können. Mit Hülfe dieser Werthe kann man nun die Gesammtunsicherheit der Durchgangszeiten berechnen, welche aus der ungenügenden Kenntniss der Instrumentalfehler hervorgeht. Verfährt man bei Reduction der Zeitsterne in der Weise, dass man als Reductionselemente unmittelbar diejenige Bestimmung der Collimation und des Azimuths, welche der dieser Gruppe von Sternen beigeordnete Polstern geliefert hat, sowie eine vollständige Nivellirung der Axe verwendet, so erhält man die wahrscheinliche Unsicherheit der Reduction auf den Meridian, wenn man die obigen Werthe in die Gleichung:

$$R = \sqrt{r_i^2 \left(\frac{\cos(\varphi \mp \delta)}{\cos\delta}\right)^2 + r_k^2 \left(\frac{\sin(\varphi \mp \delta)}{\cos\delta}\right)^2 + r_c^2 \sec^2\delta}$$

substituirt. Beispielsweise ist im Folgenden eine Uebersicht über den Betrag dieser wahrscheinlichen Fehler unter der Annahme: $\varphi = 52^0$ gegeben:

Declination	$I . r_i$	$K . r_k$	$C . r_c$	R .
—20⁰	0ˢ007	0ˢ045	0ˢ021	0ˢ050
—10⁰	0.010	0.040	0.020	0.046
0⁰	0.012	0.036	0.020	0.043
+10⁰	0.015	0.030	0.020	0.039
+20⁰	0.018	0.025	0.021	0.037
+30⁰	0.021	0.019	0.023	0.036
+40⁰	0.026	0.012	0.026	0.039
+50⁰	0.031	0.002	0.031	0.044
+60⁰	0.040	0.013	0.040	0.058
+70⁰	0.056	0.041	0.058	0.090

Da jedoch der wahrscheinliche Fehler eines Sterndurchganges nicht allein von der Unsicherheit der Reduction auf den Meridian, sondern wesentlich auch von den Beobachtungsfehlern der einzelnen Fadendurchgänge, sowie von der wahrscheinlichen Unsicherheit des persönlichen Fehlers abhängt, so wird man für diesen Gesammtfehler den Ausdruck erhalten:

$$W = \sqrt{\frac{\alpha^2}{n} + E^2 + R^2}$$

Führt man in diese Formel die obigen Werthe von R, sowie die Werthe von α ein, welche sich auf Seite 9 und 10 ergeben haben, und setzt man unter der Voraussetzung, dass man die

1 Vergleiche Anmerkung auf Seite 46.

wahrscheinlichen Fehler der Sterndurchgänge bezogen auf die gesammten Beobachtungen eines Abendes ermitteln will, bei Anwendung der Registrirmethode: $E = 0^{s}.02$, und der Aug- und Ohrmethode: $E = 0^{s}.03$, so kann man in jedem gegebenen Falle die Grösse des wahrscheinlichen Fehlers bestimmen und zugleich durch Variation von n ermitteln, in welchem Maasse der Genauigkeitsgrad zunimmt, wenn man die Anzahl der Fäden vergrössert.

Was die Abhängigkeit des Gesammtfehlers von der Declination anlangt, so ist dieselbe für den speciellen Fall $n = 11$ und $v = 100$ aus der folgenden Tabelle zu ersehen, nach welcher sich ergiebt, dass für die Breite von Mitteleuropa und eine mittlere Zahl der Fäden die Zeitbestimmung an transportablen Passageninstrumenten die schärfsten Resultate liefert, wenn man Sterne von 20° bis 30° nördlicher Declination beobachtet.

Registrirmethode.					Aug- und Ohrmethode.				
Declination	$\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$	E[1]	$R.$	$W.F.$	Declination	$\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$	E[1]	$R.$	$W.F.$
−20°	$0^{s}.018$	$0^{s}.02$	$0^{s}.050$	$0^{s}.057$	−20°	$0^{s}.024$	$0^{s}.03$	$0^{s}.050$	$0^{s}.063$
−10°	0.018	0.02	0.046	0.053	−10°	0.023	0 03	0.046	0.060
0°	0.018	0.02	0.043	0.051	0°	0.023	0.03	0.043	0.057
+10°	0.018	0.02	0.039	0.047	+10°	0.023	0.03	0.039	0.054
+20°	0.018	0.02	0.037	0.046	+20°	0.024	0.03	0.037	0.053
+30°	0.019	0.02	0.036	0.045	+30°	0.024	0.03	0.036	0.053
+40°	0.020	0.02	0.039	0.048	+40°	0.024	0.03	0.039	0.055
+50°	0.021	0.02	0.044	0.053	+50°	0.026	0.03	0.044	0.059
+60°	0.024	0.02	0.058	0.066	+60°	0.029	0.03	0.058	0.071

Auf Grund dieses Resultates wird man auch die Frage entscheiden können, welche im Anfange dieser Untersuchung in Anregung gebracht war: ob es zweckmässiger ist, für die Zwecke der Längenbestimmung blos Sterne in unmittelbarer Nähe des Zeniths zu beobachten, oder die Beobachtungen näher am Aequator gelegener Sterne zu combiniren mit den Beobachtungen von Polsternen. Schon bei der früheren Discussion dieser Frage wurden gegen die erstere Methode mannichfache Bedenken erhoben, welche die Ausführung derselben als mit grossen Schwierigkeiten verbunden erscheinen liessen; es zeigt sich nunmehr, dass auch hinsichtlich des Genauigkeitsgrades die zweite Methode den Vorzug vor der ersteren verdient.

Was ferner den Einfluss einer Variation von n betrifft, so ist derselbe aus der folgenden Tabelle zu ersehen, welche den Gesammtfehler der Durchgangszeit für eine Polhöhe von 52° und für Sterne von: + 10° Declination enthält, als derjenigen, welche für die Breite von Mitteleuropa der Bedingung entspricht, dass die Zeitsterne in gleicher Zenithdistanz nach Süden, wie die Polsterne nach Norden hin, gewählt werden sollen:

1 Es kann allerdings nur als Approximation angesehen werden, dass E in dem ganzen Umfang der obigen Declinationen als constant betrachtet ist; jedoch wird sich diese Annahme wenig von der Wahrheit entfernen, sobald man nicht auf zu extreme Werthe der Declination übergeht, da die Grösse E ihrer Ableitungsart zufolge bereits für einen Mittelwerth der Declination gilt.

	Aug- und Ohrmethode.					Registrirmethode.					
Zahl der Fäden	Vergrösserung.					Vergrösserung.					Zahl der Fäden
	40	60	80	120	200	40	60	80	120	200	
1	$0^{s}.118$	$0^{s}.101$	$0^{s}.095$	$0^{s}.090$	$0^{s}.087$	$0^{s}.105$	$0^{s}.085$	$0^{s}.078$	$0^{s}.072$	$0^{s}.069$	1
2	0.090	0.079	0.075	0.072	0.071	0.080	0.068	0.063	0.060	0.058	2
3	0.079	0.071	0.068	0.066	0.064	0.070	0.061	0.057	0.055	0.053	3
4	0.073	0.066	0.064	0.062	0.061	0.065	0.057	0.054	0.052	0.051	4
5	0.069	0.063	0.061	0.060	0.059	0.061	0.055	0.052	0.051	0.050	5
6	0.066	0.061	0.059	0.058	0.057	0.059	0.053	0.051	0.050	0.049	6
7	0.064	0.059	0.058	0.057	0.056	0.057	0.052	0.050	0.049	0.048	7
8	0.062	0.058	0.057	0.056	0.055	0.055	0.051	0.049	0.048	0.048	8
9	0.061	0.057	0.056	0.055	0.055	0.054	0.050	0.049	0.048	0.047	9
10	0.060	0.057	0.055	0.055	0.054	0.053	0.050	0.048	0.047	0.047	10
11	0.059	0.056	0.055	0.054	0.054	0.052	0.049	0.048	0.047	0.047	11
15	0.056	0.054	0.053	0.053	0.053	0.050	0.048	0.047	0.046	0.046	15
25	0.054	0.052	0.052	0.051	0.051	0.048	0.046	0.046	0.045	0.045	25

Ueber eine gewisse Grenze hinaus ist daher die Vermehrung der Fäden fast einflusslos auf die Erhöhung der Genauigkeit, aus welchem Grunde das Bestreben, insbesondere bei Anwendung der Registrirmethode möglichst viele Fäden zu beobachten, nur innerhalb gewisser Grenzen gerechtfertigt erscheint.

Mit Erlangung der verbesserten Durchgangszeiten der Sterne durch den Ortsmeridian ist der rein astronomische Theil der Längenbestimmung vollendet; es ist nun erforderlich, auf den zweiten Theil: auf die Bestimmung des absoluten Zeitunterschiedes der Zeitscalen beider Stationen, d. i. auf die Vergleichung der Uhren mit Hülfe der elektrischen Signale einzugehen.

Abschnitt VI.

Uhrvergleichung und Ableitung der Längendifferenz.

Bei der Uhrvergleichung mit Hülfe des electrischen Telegraphen geht man von dem Princip aus, eine Beziehung zwischen den Zeitscalen der beiden Stationen auf die Weise herzustellen, dass man die Oerter einzelner absoluter Zeitmomente innerhalb beider Zeitscalen zu ermitteln sucht.

Diese ideale Aufgabe kann jedoch bei Benutzung des electrischen Telegraphen nur angenähert gelöst werden, da der electrische Strom in Folge seiner endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit, sowie in Folge der Trägheit der Receptivapparate die Markirung absoluter Zeitmomente an beiden Stationen nicht ermöglicht, sondern nur Zeitmomente anzeigen wird, welche, auf eine absolute Zeitscala bezogen, um die sog. Stromzeit — dem Zeitintervall zwischen dem Moment des Tasterschlusses auf der einen Station und der Hervorbringung mechanischer Wirkungen auf der anderen Station — von einander abweichen. Die Folge davon ist, dass die Differenz der entsprechenden Zeitmomente beider Scalen, verbessert um die Uhrstände und die persönliche Gleichung, in demjenigen Falle, wo diese Momente durch Anwendung des electrischen Telegraphen erlangt sind, noch nicht die wirkliche Längendifferenz ergiebt, sondern eine Grösse, welche um den Betrag der Stromzeit von derselben abweicht. Da aber für den Fall, dass die telegraphischen Signale in der Richtung von der östlichen nach der westlichen Station hin gegeben sind, die auf der letzteren markirten Zeitmomente in Wahrheit einer Drehungsphase der Erde oder einer Meridianlage der östlichen Station entsprechen, welche von den dort verzeichneten Momenten im Sinne einer fortgeschrittenen Rotation abweicht, so erhält man in diesem Falle die Längendifferenz um die Stromzeit zu klein, während eine ganz analoge Betrachtung lehrt, dass man die Längendifferenz um denselben Betrag zu gross erlangt, wenn die Signale in der Richtung von der westlichen nach der östlichen Station hin gegeben werden. Durch Combination beider Verfahrungsweisen erhält man demnach die Längendifferenz frei von der Verzögerung in der Fortpflanzung des Stromes, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass die Stromzeit in beiden Fällen genau von gleichem Betrage ist.

Da diese Voraussetzung zum Erlangen richtiger Zahlwerthe für die Längendifferenz unerlässliche Bedingung ist, so ist es nothwendig auf die Ursachen einzugehen, welche modificirend auf den Betrag der Stromzeit einwirken, und nach einem Verfahren zu suchen, durch dessen Anwendung der schädlichen Einwirkung dieser Fehlerquellen vorgebeugt wird.

Eine der Hauptfehlerquellen besteht in unzureichender Constanz der Stromstärke,[1]

---

1 Beiläufig sei darauf hingewiesen, dass man bei Längenbestimmungen nur mit directen Leitungen operiren kann, weil jede Uebertragung eine Quelle erheblicher Unsicherheiten darstellen würde.

welche besonders aus dem Grunde einen sehr nachtheiligen Einfluss ausübt, weil wesentlich von der Intensität des Stromes die Schnelligkeit in der Action der Receptivapparate abhängt. Es folgt dies unmittelbar daraus, dass der Strom am Ende der Leitung allmählich zur vollen Intensität anwächst, da derselbe bei grösserem Ausgangswerth schneller denjenigen Grad der Intensität erreicht, welcher zum Anziehen des Ankers, speciell zur Ueberwindung der Federspannung desselben erforderlich ist. Weil aber selbst bei gleicher Stärke des abgehenden Stromes der am Ende der Leitung ankommende Betrag desselben von den Witterungsverhältnissen abhängig ist, insofern dieselben den Widerstand der Nebenschliessungen wesentlich modificiren, so geht hieraus, selbst bei möglichster Constanz der electrischen Batterieen, die Nothwendigkeit besonderer Einrichtungen hervor, welche dahin zielen, zu jeder Zeit einen Strom von gleicher Intensität auf den Receptivapparat einwirken zu lassen. Man erreicht dieses am leichtesten durch Herstellung einer localen Verzweigung der Leitung, indem man den Receptivapparat und eine Boussole in den einen Zweig und einen Rheostaten in den anderen Zweig einschaltet und den letzteren beständig so regulirt, dass sowohl bei abgehenden als auch bei ankommenden Strom die Stromintensität im anderen Zweige unverändert bleibt.

Wenn aber unter Anwendung dieses Hülfsmittels die Bedingung einer stets gleich schnellen Action der Receptivapparate erreicht werden soll, so muss ausserdem die Empfindlichkeit des Apparates genau dieselbe bleiben. Besteht dieser Apparat in einem Relais, welcher Fall bei Längenbestimmungen fast durchgängig vorkommt, so wird man dasselbe sorgfältig vor Verstellung der Correctionsschrauben schützen müssen; oder aber, man muss die numerischen Werthe der Verzögerungen, welche das Relais bei verschiedenen seiner Stellungen erleidet, bestimmen und dieselben als Correction an die Resultate der Längendifferenz anbringen.

Die Bedingung einer völlig gleichen Stromzeit in beiden Richtungen setzt aber ferner die gleiche Empfindlichkeit der an den beiden Endpunkten der Leitung stationirten Relais voraus. Man kann jedoch den störenden Einfluss dieser Fehlerquelle dadurch eliminiren, dass man in der Mitte der Längenbestimmungsoperationen die Relais der beiden Endpunkte mit einander vertauscht, in welchem Falle man aber nur dann den Zweck vollständig erreicht, wenn man an beiden Endpunkten nur Ströme von gleicher Intensität durch das Relais hindurchgehen lässt. Oder man kann dem Obigen analog die numerischen Werthe der Verzögerungen der Relais, welche den verschiedenen Stromstärken entsprechen, bestimmen und demgemäss die Ergebnisse der Längenbestimmung corrigiren.

Die Bestimmung dieser Grössen geschieht am vortheilhaftesten in der Weise, dass man auf einem Registrirapparat mit Hülfe des einen Ankers beständig Secundenpunkte einer Uhr markiren lässt, welche lediglich als Scala dienen, während man in den Stromkreis des anderen Ankers eine zweite Uhr von nahe gleichem Gange, sowie das zu untersuchende Relais einschaltet. Die relativen Verschiebungen der Secundenscalen bei Variation der Stromstärken oder der Stellungen des Relais geben alsdann die relativen Werthe der Verzögerungen an, während man die absoluten Maasse auf die Weise erhält, dass man die Verschiebung der Secundenscala der zweiten Uhr auch für den Fall der gänzlichen Ausschaltung des Relais bestimmt. Bei Ausführung dieser Operation wird man besonders darauf achten müssen, dass in jedem dieser

Fälle der auf den Electromagneten des Registrirapparates einwirkende Strom von gleicher Intensität ist, weil sonst der Electromagnet verschieden schnell reagiren würde. In Ermangelung zweier Registriruhren kann man auch mit einer einzigen ausreichen, indem man eine Stromtheilung herstellt und alsdann mit den beiden Zweigen derselben genau in der Weise operirt, wie im obigen Falle mit den beiden Uhren.

Die Genauigkeit, mit welcher man auf diesem Wege die Verzögerungen der Relais erhält, hängt wesentlich von der Sicherheit ab, mit welcher man die auf dem Registrirapparat verzeichneten Momente abliest; bedient man sich hierzu bei Anwendung eines Streifenapparates einer Glasplatte, auf welcher ein System von 11 wenig gegeneinander convergirender Linien eingerissen ist, so dass man mit Hülfe derselben direct die Zehntelsecunden ablesen und die Hundertelsecunden schätzen kann, so lehren die bisherigen Versuche dieser Art, dass die Verschiebung der beiden Scalen, welche aus der Ablesung eines einzigen ohne Relais und eines mit Einschaltung des Relais verzeichneten Punktes folgt, bereits bis auf: $\pm 0^s01$ genau die Verzögerung des Relais ergiebt. Wenn man daher auch nur eine geringe Anzahl von Punkten abliest, so wird man bereits einen Genauigkeitsgrad dieser Reductionswerthe erlangen, welcher denjenigen der übrigen Operationen der Längenbestimmung weit übertrifft. Da die Zahlwerthe dieser Verzögerungen, welche meist zwischen 0^s01 und 0^s10 variiren, sehr von der mehr oder minder empfindlichen Stellung der Relais abhängen, so wird es sehr förderlich für ein sicheres Operiren bei Längenbestimmungen sein, wenn man diese Relais mit Scalen zum genauen Ablesen der jedesmaligen Stellungen versieht.

In Ermangelung eines Registrirapparates kann man die numerischen Werthe dieser Verzögerungen mit Hülfe von Coincidenzbeobachtungen erhalten; da die Ermittlungen auf diesem Wege aber sehr zeitraubend sind — denn Coincidenzen wird man kaum in engeren Intervallen als je 2 Minuten auf einander folgen lassen können, während sich auf dem Registrirapparat die Signale von Secunde zu Secunde verzeichnen — so wird es vortheilhafter sein, in diesem Falle nur die relativen Verzögerungen der Relais zu ermitteln. Man verfährt dann in der Weise, dass man eine Uhr successive auf dem einen und dem anderen Relais schlagen lässt und die Coincidenzen dieser Schläge mit denen einer anderen Uhr beobachtet; die relativen Verzögerungen gehen unmittelbar aus dem Gange dieser Coincidenzen hervor.

Bringt man die so erhaltenen Werthe für die Verzögerungen der Relais als Verbesserungen an die Beobachtungszeiten der telegraphischen Signale an und reducirt diese mit Hülfe eines angenäherten Uhrganges auf eine und dieselbe Zeitepoche, so erhält man Werthe für die Uhrdifferenz, welche genau um den Betrag der Stromzeit zu klein oder zu gross sind, je nachdem die Signale von der östlichen oder von der westlichen Station aus gegeben wurden. Unter Berücksichtigung der Uhrstände an beiden Stationen und unter Hinzuziehung der persönlichen Gleichung ergeben sich dann für die Längendifferenz folgende Ausdrücke:

Beobachter auf der westl. Station	östl. Station	Signale gegeben auf der	
A	*B*	östlichen Station:	$L = \Delta_1 + dU_1 - du_1 + p + s$
A	*B*	westlichen » :	$L = \Delta_2 + dU_2 - du_2 + p - s$
B	*A*	östlichen » :	$L = \Delta_3 + dU_3 - du_3 - p + s$
B	*A*	westlichen » :	$L = \Delta_4 + dU_4 - du_4 - p - s$

wenn p die persönliche Gleichung im Sinne: $p = B - A$ bezeichnet.

Diese Gleichungen ergeben, dass man durch einen Beobachterwechsel in der Mitte der Längenbestimmungsoperationen die persönliche Gleichung ganz eliminiren kann, welches Verfahren auch insofern eine Ersparniss an Zeit gewähren wird, als man dann aller besonderer Beobachtungen zur Ermittlung der persönlichen Gleichung überhoben ist. Doch ist dieses Verfahren nur mit Vorsicht anzuwenden, weil Andeutungen vorhanden sind, dass innerhalb mancher Beobachtercombinationen die persönliche Gleichung an verschiedenen Orten von verschiedenem Betrage ist, eine Erscheinung, welche insbesondere in dem Falle kein Befremden erregen wird, wenn auf den beiden Stationen sehr verschiedene Instrumente zur Anwendung kommen und die gesammten äusseren Verhältnisse der Beobachtungen sehr von einander abweichen. Man wird daher bei Ausführung dieses Verfahrens nur dann den Zweck der Elimination der persönlichen Gleichung vollständig erreichen, wenn man möglichst gleiche Instrumente zur Anwendung bringt und die äusseren Umstände der Beobachtungen so übereinstimmend als möglich macht. Uebrigens wird bei Beurtheilung dieser Angelegenheit die Uebung der Beobachter von wesentlichem Einfluss sein, da zu erwarten steht, dass Beobachter, welche in Messungen dieser Art eingeübt sind, weit weniger von äusseren Verhältnissen abhängig sein werden, als diejenigen, welche einen minderen Grad von Uebung besitzen.

Da die persönliche Gleichung nur für diejenigen Fälle ermittelt worden ist, bei denen sich das Instrument für beide Beobachter in der Westlage oder in der Ostlage befand, also für die Combinationen: West — West oder Ost — Ost, nicht aber für die Fälle: West — Ost und Ost — West: so wird man wegen der Abhängigkeit der persönlichen Gleichung von der Kreislage bei Ausführung von Längenbestimmungen dafür Sorge zu tragen haben, dass jedesmal dieselben Sterne an beiden Stationen auch in gleichen Kreislagen beobachtet werden, weil man nur in diesem Falle die Resultate der einzelnen Sterne vollständig vom Einfluss der persönlichen Gleichung befreien kann.

Nach erfolgter Erörterung dieser allgemeinen Bemerkungen soll nun auf eine Discussion der verschiedenen Methoden der Längenbestimmung eingegangen werden, soweit sich diese beziehen auf die verschiedenen Arten der astronomischen Beobachtung und die mannichfachen Combinationen derselben mit Uhrvergleichungen auf Grund der verschiedenen Gattungen der electromagnetischen Signale.

In dieser Beziehung sind zunächst zwei Hauptgattungen zu unterscheiden: diejenige, welche im ganzen Verlauf dieser Untersuchung in den Vordergrund gestellt wurde und sich definiren lässt als locale astronomische Zeitbestimmung combinirt mit Uhrvergleichung auf electromagnetischem Wege, und ein zweites Verfahren, bei welchem

diese beiden Operationen nicht in expliciter Weise von einander getrennt sind, sondern die registrirten Fadendurchgänge gleichzeitig auf beiden Stationen markirt und daher weitere Signale zur Uhrvergleichung ganz entbehrlich gemacht werden. Die erste Gattung bietet ferner eine Mannichfaltigkeit insofern dar, als die astronomische Beobachtung erfolgen kann unter Anwendung der Aug- und Ohr- oder der Registrirmethode, und die electromagnetischen Signale unter den Formen als hörbare Anschläge des Relais, Registrirsignale oder als sichtbare Galvanometerausschläge erscheinen können. Bei der Combination dieser verschiedenen Arten wird man im Allgemeinen von dem Gesichtspunkt ausgehen, die astronomischen Beobachtungen und die Uhrvergleichungen durch Messungen derselben Art zu bewerkstelligen; man wird also die Aug- und Ohrmethode combiniren mit Uhrvergleichungen auf Grund hörbarer Anschläge des Relais, während man bei Anwendung der Registrirmethode von Registrirsignalen Gebrauch machen wird.

Was diese Signale speciell betrifft, so kann man die hörbaren Anschläge des Relais in der Weise verwerthen, dass man direct mit Hülfe des Gehörs die Zeit eines jeden solchen Signales bestimmt; da jedoch Beobachtungen dieser Art sehr unsichere Resultate liefern, so ist das Verfahren zweckmässiger, eine Hülfsuhr in die Telegraphenleitung einzuschalten, welche in Intervallen von Secunde zu Secunde in beständigem Wechsel den Strom schliesst und wieder unterbricht, und diese Stromschliessungen durch Anschlagen der Relais auf beiden Stationen hörbar zu machen. Ist nun dieses Intervall der Schläge um eine kleine Grösse verschieden von dem Intervall der Secundenschläge der eigentlichen Beobachtungsuhren, so lassen sich an jeder der Stationen die Coincidenzen dieser Schläge des Relais mit denen der Hauptuhr beobachten, aus welchen sich alsdann die Differenz der Uhrstände ermitteln lässt. Die Sicherheit, mit welcher man auf diesem Wege die Uhrvergleichung bewirken kann, ist aus den nachfolgenden Werthen zu ersehen, welche die wahrscheinlichen Fehler derjenigen Uhrdifferenzen bezeichnen, die durch Combination je einer Coincidenz beider Stationen erlangt wurden:

Längenbestimmung:	Berlin — Leipzig:	$\pm$ 0ˢ016
	Leipzig — Gotha:	$\pm$ 0.014
	Berlin — Wien:	$\pm$ 0.016

Vergleicht man mit diesen Werthen den wahrscheinlichen Fehler der Uhrvergleichungen, welche auf Combination eines einzigen Registrirsignales der einen Station mit dem entsprechenden der anderen Station beruhen, ein Werth, für den sich aus 377 Signalpaaren der Längenbestimmung:

Göttingen — Leiden: $\pm$ 0ˢ015 [1]

ergiebt, so zeigt sich, dass der Genauigkeitsgrad beider Verfahren bei Anwendung von Hülfsmitteln zum sicheren Ablesen der Registrirsignale genau derselbe ist; ein wesentlicher Unterschied beruht aber darin, dass die Coincidenzen nur in Zeiträumen von wenigstens 2 Minuten

---

1 Hierbei sind die Signale in Göttingen mit Hülfe eines auf eine Glasplatte eingerissenen convergirenden Liniensystems, diejenigen in Leiden aber unter Anwendung eines Microscops, in dessen Brennpunkt eine Scala angebracht war, abgelesen worden.

auf einander folgen können, während man die Registrirsignale ohne alle Bedenken von Secunde zu Secunde geben kann. Man erreicht also bei Anwendung der Registrirsignale in einer halben Minute denselben Genauigkeitsgrad wie bei Beobachtung von Coincidenzen während einer Stunde, ein Resultat, welches sehr zu Gunsten der Registrirmethode spricht, um so mehr, da bei Anwendung derselben zugleich eine grössere Schärfe der Zeitbestimmungen erlangt wird. Doch wird man deshalb für den Zweck der Längenbestimmungen die Aug- und Ohrmethode nicht zu verwerfen brauchen, insofern die Ausführung neben der Registrirmethode wesentlich dazu beitragen wird, die Sicherheit des Endresultates zu erhöhen, weil dasselbe alsdann aus Beobachtungen wesentlich verschiedener Art hervorgegangen ist.

Als eine dritte Art der Signale wurden im Obigen die sichtbaren Galvanometerausschläge bezeichnet, deren Genauigkeitsgrad jedoch ein ziemlich beschränkter ist infolge der Schwierigkeit, den Moment des beginnenden Ausschlages in Beziehung zu setzen zur Zeitscala. Auch bei Ausführung dieser Signale wird man sorgfältig darauf achten müssen, dass der Strom, welcher auf die Windungen des Galvanometers einwirkt, stets von gleicher Intensität ist; übrigens wird man wohl thun, Signale dieser Art wegen ihres beschränkten Genauigkeitsgrades soviel als möglich zu vermeiden.

Das Vorhergehende bezog sich durchgängig auf diejenige Methode der telegraphischen Längenbestimmung, welche im Obigen bezeichnet wurde als locale astronomische Zeitbestimmung verbunden mit Uhrvergleichung auf dem Wege electromagnetischer Signale. Was aber die zweite Methode: das sog. Hin- und Herregistriren betrifft, so liegt ein wesentlicher Vorzug dieses Verfahrens gegenüber dem ersteren darin, dass man bei Ausführung desselben eine grössere Unabhängigkeit vom Uhrgang erlangt, weil jeder an beiden Stationen beobachtete Durchgang eines und desselben Sternes einen individuellen Werth für die Längendifferenz liefert; während bei Ausführung der anderen Methode die Ergebnisse einer grösseren Zahl von Sternen zu mehreren definitiven Uhrständen innerhalb eines Abendes zusammengefasst und auf Grund dieser Werthe und des daraus hervorgehenden Uhrganges der genaue Uhrstand zur Zeit des Signalwechsels interpolirt werden muss. Da auch bei Anwendung dieses Verfahrens die Bedingung einer unveränderten Stromintensität erfüllt sein muss, so wird es sich empfehlen, die Auswahl der Sterne so zu treffen, dass stets nur eine Station arbeitet, in welchem Falle man alsdann bei jedem Uebergang von ankommendem und abgehendem Strom eine Regulirung des Rheostaten vornehmen kann. Registriren aber beide Stationen gleichzeitig, so ist dieses Verfahren nicht anwendbar; es bleibt dann nur das Mittel übrig, wiederholt die Intensitäten des abgehenden und des ankommenden Stromes zu bestimmen, ferner den Unterschied in den Verzögerungen der Relais, welcher diesem Wechsel der Stromstärken entspricht, in der früher angedeuteten Weise numerisch zu ermitteln und denselben als Correction an die Beobachtungsresultate anzubringen. Uebrigens knüpft sich die Anwendbarkeit dieser Methode des Hin- und Herregistrirens an die Bedingung, dass die Leitung während der ganzen Dauer der Beobachtungen zur Disposition steht; ist dies nicht der Fall, so kann man nur das andere Verfahren zur Anwendung bringen, bei dessen Ausführung die Leitung insbesondere unter Benutzung der Registrirmethode nur während eines sehr kurzen Zeitraumes erforderlich ist. Das letztere

Verfahren der localen astronomischen Zeitbestimmung verbunden mit Uhrvergleichung auf electromagnetischem Wege wird man auch in dem Falle anwenden müssen, wo man gleichzeitig die Längendifferenzen einer Station mit mehreren anderen Stationen ermitteln will.

Nach Erledigung dieser allgemeinen Discussion über die verschiedenen Methoden zur Längenbestimmung mögen einige Bemerkungen über die numerische Verwerthung der verschiedenen Arten electromagnetischer Signale folgen. Was in dieser Beziehung die Ausrechnung der Coincidenzen anlangt, so sind im Wesentlichen zwei Verfahrungsweisen in Gebrauch, deren Gang im Folgenden angedeutet werden soll.

Bezeichnet man die Länge einer Coincidenzuhrsecunde ausgedrückt in Sternzeitsecunden mit μ, ferner die auf der östlichen Station beobachteten Coincidenzzeiten der Hauptuhr der Reihe nach mit $A, B, C \ldots. P$, die auf der westlichen aber mit $a, b, c \ldots. p$, und setzt man auf Grund vorläufiger Discussionen die Differenz der beiden Hauptuhren:

$$t = \Delta \pm x$$

wo Δ der bereits angenähert gekannte, auf ganze Secunden abgerundete Werth der Uhrdifferenz,[1] x aber die gesuchte Verbesserung dieses Werthes bezeichnet, so erhält man die Relationen:

$$\begin{aligned} \mu\,(A - \Delta - a) &= (A - \Delta - a)^s \mp x \\ \mu\,(B - \Delta - b) &= (B - \Delta - b)^s \mp x \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \mu\,(P - \Delta - p) &= (P - \Delta - p)^s \mp x \end{aligned}$$

aus welchen man so viel Werthe für x erhält, als Gleichungen vorhanden sind. Man kann dieselben alsdann zu einem Mittelwerth vereinigen und diesen als gültig für das Mittel der Zeiten: $A, B, C \ldots. P$, oder auch als gültig für die Rectascension:

$$\frac{A + B + C + \ldots. + P}{m} - \tfrac{1}{2} L$$

oder:

$$\frac{a + b + c + \ldots. + p}{m} + \tfrac{1}{2} L$$

wo m die Anzahl der Coincidenzen und L die Längendifferenz bezeichnet, betrachten.

In diesem Falle verbindet man also jede Coincidenz der einen Station mit der entsprechenden der anderen Station..

Hingegen gründet sich das zweite Verfahren darauf, dass man die Coincidenzen jeder der Stationen auf eine und dieselbe Epoche der Hülfsuhr reducirt, indem man die Ausdrücke bildet:

$$\begin{aligned} T &= A + \mu\,(t - a) \\ T &= B + \mu\,(t - b) \\ &\ldots\ldots \\ T &= P + \mu\,(t - p) \end{aligned}$$

---

1 Diesen Näherungswerth wird man durch einige wenige Registrirsignale erhalten können.

wo in diesem Falle A, B .... P die an der Hauptuhr beobachteten Coincidenzzeiten, a, b .... p die entsprechenden Zeiten der Hülfsuhr, μ die Länge der Hülfsuhrsecunde ausgedrückt in Secunden der Hauptuhr, und t die Epoche der Hülfsuhr bezeichnet, auf welche reducirt werden soll. Auf diese Weise erhält man für jede der Stationen Mittelwerthe für T, deren Differenz, eventuell noch verbessert wegen eines Gangunterschiedes der Relais, unmittelbar die Uhrdifferenz vermehrt oder vermindert um den Betrag der Stromzeit ergiebt, je nachdem die Hülfsuhr der westlichen oder der östlichen Station in Anwendung gekommen war.

Bei Anwendung von Registrirsignalen wird das Verfahren insofern ein einfacheres, als man dann nur nöthig hat, die Differenzen der Beobachtungszeiten der identischen Signale beider Stationen zu bilden, dieselben zu einem Mittelwerth zu vereinigen und diesen als für das Mittel der Zeiten dieser Signale gültig zu betrachten. Mit den in der entgegengesetzten Richtung gegebenen Signalen verfährt man in derselben Weise, corrigirt alsdann die Werthe wegen des Gangunterschiedes der Relais und reducirt dieselben mit Hülfe des relativen Ganges der Uhren auf eine und dieselbe Zeitepoche. Die halbe Summe giebt alsdann den definitiven Werth der Uhrdifferenz, die halbe Differenz hingegen den Betrag der Stromzeit. Die Kenntniss des relativen Ganges der Uhren, welche zur Ausführung der obigen Reduction erforderlich ist, erlangt man aus dem Signalwechsel selbst durch Vergleichung der Differenz zwischen den Beobachtungsuhren der beiden Stationen innerhalb auf einander folgender Tage.

Wenn man an die so erlangte Differenz der Beobachtungsuhren nach Maassgabe der Formeln auf S. 70 die Uhrstände beider Stationen, welche für den Moment des Signalwechsels gelten, sowie den Betrag der persönlichen Gleichung anbringt, so erhält man unmittelbar den wahren Zeitunterschied oder die Längendifferenz der beiden Stationen.

Was die Ableitung der definitiven Uhrstände für die Zeit des Signalwechsels betrifft, so sind im Wesentlichen zwei Verfahrungsweisen in Gebrauch: die eine, wonach die gesammten astronomischen Beobachtungen eines Abendes zu einzelnen Gruppen zusammengefasst und so gleichsam Normalwerthe für die Uhrstände gebildet werden, aus denen man alsdann den wahrscheinlichsten Werth des Uhrstandes für die Zeit des Signalwechsels interpolirt, während man bei dem anderen Verfahren unmittelbar die Zeit des Signalwechsels als Ausgangspunkt annimmt und aus der Gesammtheit der astronomischen Beobachtungen des betreffenden Abendes den wahrscheinlichsten Uhrstand für diese Zeitepoche ermittelt. In beiden Fällen ist die Kenntniss eines angenäherten Uhrganges nöthig, um die Ergebnisse der einzelnen Sterne auf die angenommenen Zeitepochen reduciren zu können. Nach erfolgter Ausführung dieser Reduction kann man die Ableitung der definitiven Uhrstände für die betreffenden Zeitepochen wiederum in verschiedener Weise vornehmen; hier möge zunächst das Verfahren discutirt werden, welches auf Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate basirt ist.

Geht man von der Voraussetzung aus, dass die in Anwendung gebrachten Instrumentalfehler noch mit gewissen Unsicherheiten behaftet sind, so liefert jeder Stern eine Gleichung von der Form:

$$v = dU + I\,di + K\,dk + C\,dc.$$

Bezeichnet man ferner das Gewicht einer jeden solchen Gleichung mit g, so erhält man die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten aus dem nachfolgenden Gleichungssystem:

$$[g\,v] = [g]\;dU + [g\,I]\;di + [g\,K]\;dk + [g\,C]\;dc.$$
$$[g\,v\,I] = [g\,I]\;dU + [g\,I\,I]\;di + [g\,K\,I]\;dk + [g\,C\,I]\;dc.$$
$$[g\,v\,K] = [g\,K]\;dU + [g\,I\,K]\;di + [g\,K\,K]\;dk + [g\,C\,K]\;dc.$$
$$[g\,v\,C] = [g\,C]\;dU + [g\,I\,C]\;di + [g\,K\,C]\;dk + [g\,C\,C]\;dc.$$

Eine erhebliche Schwierigkeit bei Ausführung dieses Rechnungsverfahrens besteht in der Wahl der Gewichte der einzelnen Gleichungen; man wird in dieser Beziehung am rationellsten in der Weise verfahren, dass man auf Grund gewisser Voraussetzungen über die Unsicherheit der einzelnen Reductionselemente die wahrscheinlichen Fehler der Sterndurchgänge ermittelt und die Gewichte proportional annimmt den reciproken Quadraten dieser Werthe. Mit Hinweis auf die Bezeichnungen auf S. 64 dieser Schrift wird man auf diese Weise für die Gewichte Ausdrücke von der Form erhalten:

$$G = \frac{1}{\frac{\alpha^2}{n} + E^2 + R^2}$$

Da jedoch die Voraussetzungen über die Unsicherheit in den einzelnen Reductionselementen nur als Approximationen zu betrachten sind, so wird man auch auf diesem Wege nur ziemlich rohe Annäherungen für die wahren Gewichte der einzelnen Gleichungen erhalten und deshalb die Zahlwerthe ziemlich abrunden können. In dem Falle, wo man zur Zeitbestimmung nur Sterne in der Nähe des Aequators verwendet hat, wird es selbst zulässig erscheinen, allen vollständig oder nahe vollständig beobachteten Durchgängen dieser Sterne gleiches Gewicht beizulegen; hat man jedoch auch Zenithsterne beobachtet, so wird man das Gewicht derselben gegenüber dem der Aequatorsterne auf Grund der obigen Formel zu ermitteln haben. Grössere Sorgfalt wird man darauf verwenden müssen, den Polsternen gegenüber den Zeitsternen das richtige Gewicht beizulegen.

Doch wird man diese Methode der Bestimmung des wahrscheinlichsten Uhrstandes nur mit grosser Vorsicht anwenden dürfen; denn abgesehen davon, dass die Gewichtsermittlung selbst nach dem obigen Verfahren nur als rohe Approximation zu betrachten ist, wird bei Ausführung dieser Methode infolge des Umstandes, welcher bei früherer Gelegenheit ausführlicher erörtert worden ist, dass durch Unregelmässigkeiten in den Zapfenquerschnitten seitliche Bewegungen des Fernrohres bei verschiedenen Zenithdistanzen eintreten, die Gefahr nahe liegen, die Durchgangszeiten der Sterne nicht auf den Meridian selbst, sondern auf einen Stundenkreis zu beziehen, der ihm nur benachbart ist. Allerdings kann man durch angemessene Wahl der Sterne diese Gefahr auf ein Minimum reduciren, aber es lässt sich noch anderweit ein erhebliches Bedenken gegen die Anwendung dieses Verfahrens geltend machen. Denn will man auf diesem Wege Resultate erlangen, welche, insbesondere was die Correctionen: di, dk, dc betrifft, einigermaassen Anspruch auf Zuverlässigkeit besitzen sollen, so muss man zur Bestimmung dieser Unbekannten eine grössere Zahl von Sterndurchgängen, z. B. die gesammten Beobachtungen eines Abendes, zusammenfassen; hierbei macht man aber die Voraussetzung, dass die Werthe i, k, c während dieses ganzen Zeitraumes als constant zu betrachten sind, welche Annahme in vielen Fällen ganz unzulässig erscheint. Will man aber eine solche

Veränderlichkeit dieser Grössen in Berücksichtigung ziehen, so wird man zu den vier Unbekannten: dU, di, dk, dc, selbst wenn man den einfachsten Fall annimmt und die Veränderungen der Zeit oder der Temperatur proportional setzt, weitere drei unbekannte Grössen hinzuzufügen haben und hiermit bereits eine Complication der Rechnung erlangen, welche in keinem Verhältniss steht zur Vermehrung der Genauigkeit. Man wird von diesen umständlichen Rechnungen umsomehr absehen können, weil sich der Genauigkeitsgrad überhaupt nur bis zu einer gewissen Grenze steigern lässt, insofern derselbe noch wesentlich von dem Fehler im angenommenen Uhrgang, der Sicherheit, mit welcher die persönliche Gleichung ermittelt ist, ferner den etwaigen Schwankungen in der Grösse der persönlichen Gleichung bei der West- und Ostlage des Instrumentes, sowie eventuell dem Einflusse unregelmässiger Zapfengestalt abhängig ist.

Die Gesammtheit dieser Betrachtungen ergiebt, dass sich in diesem speciellen Falle durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate die Genauigkeit nur wenig steigern lässt; es erscheint deshalb rathsamer, den wahrscheinlichsten Uhrstand durch successive Näherungen zu ermitteln, insbesondere aber die Anordnung der Beobachtungen gleich so zu treffen, dass eine möglichst umfassende Elimination aller Fehlergrössen stattfindet. In welcher Weise man das Letztere erreichen kann, ist aus dem allgemeinsten Ausdruck der Verbesserungen zu ersehen, welcher von der Form[1] ist:

$$x = \{a + b' \cos z + b'' \cos 2z + b''' \cos 3z + \ldots\ldots + c' \sin z + c'' \sin 2z + c''' \sin 3z + \ldots\ldots\} \sec \delta$$

und welcher durch Umlegung des Instrumentes übergeht in:

$$x' = \{-a - b' \cos z - b'' \cos 2z - b''' \cos 3z - \ldots\ldots + c' \sin z + c'' \sin 2z + c''' \sin 3z + \ldots\ldots\} \sec \delta$$

Diese Gleichungen lehren, dass das absolute Glied und die Cosinusglieder wegfallen, wenn man die Südsterne in denselben Zenithdistanzen annimmt, wie die Polsterne; sowie dass die Sinusglieder verschwinden, wenn man Sterne möglichst nahe am Zenith beobachtet. Was das Letztere: die Hinzuziehung von Zenithsternen anlangt, so lässt sich dagegen das Bedenken geltend machen, dass bei denselben die Beobachtungsfehler der Fadendurchgänge beträchtlich vergrössert erscheinen und dass aus diesem Grunde eine Verminderung des Genauigkeitsgrades zu erwarten ist, welche den Nutzen der Beobachtung solcher Sterne zweifelhaft erscheinen lässt. Hingegen ist die Nothwendigkeit der Erfüllung der ersten Bedingung: der Gleichheit der Zenithdistanzen im Süden und Norden, allgemein anerkannt, um so mehr, da in diesem Falle bei häufig wiederholter Umlegung gleichzeitig auch der Einfluss einer unregelmässigen Zapfengestalt eliminirt wird; man wird daher bei Auswahl der Sterne das Bestreben darauf richten müssen, die obige Bedingung möglichst nahe zu erfüllen.

Die bisherige Betrachtung über die Ableitung der wahrscheinlichsten Endresultate bezog sich zunächst nur auf den Fall der localen astronomischen Beobachtung mit Uhrvergleichung

---

1 Vergl. Peters, Ueber die Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen Altona und Schwerin. Altona 1861. pag. 3.

auf telegraphischem Wege; fast alle der hier erlangten Resultate lassen sich aber unmittelbar auch auf den Fall des Hin- und Herregistrirens übertragen. Doch findet hierbei ein Unterschied insofern statt, als man die astronomischen Beobachtungen jeder der Stationen nicht für sich behandelt, sondern sofort aus jedem beiderseitig beobachteten Stern die Längendifferenz ermittelt und aus der Gesammtheit dieser Bestimmungen auf Grund analoger Principien wie im obigen Fall den wahrscheinlichsten Endwerth der Längendifferenz ableitet. Wegen der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des electrischen Stromes, sowie der Trägheit der Receptivapparate, wird man bei diesem Verfahren die Längendifferenz auf der westlichen Station zu klein, auf der östlichen zu gross erhalten, während das Mittel beider Werthe unter Voraussetzungen, welche auf S. 68 näher erörtert sind, frei ist vom Einfluss der Stromverzögerung. Der so erlangte Werth ist noch wegen des Gangunterschiedes der Relais, sowie wegen der persönlichen Gleichung zu verbessern und mit Hülfe der Uhrgänge auf die wahre Zeitscala zu reduciren.

Nach Discussion dieser Verfahrungsweisen zur Ableitung der Endresultate sollen noch einige Notizen über die Anordnung der Beobachtungen innerhalb einer vollständigen Beobachtungsreihe hinzugefügt werden. Ein Haupterforderniss bei Aufstellung des Beobachtungsschema besteht darin, dass dasselbe in allen Theilen gleichen Grad der Sicherheit bietet, so dass z. B. die Anzahl der Zeitsterne in angemessenem Verhältniss steht zur Genauigkeit, mit welcher man aus den Polsternen und dem Niveau die Kenntniss der Instrumentalfehler erlangt.

Was speciell diese Instrumentalfehler betrifft, so erscheint es rathsam, dieselben im Verlauf eines Abendes wiederholt zu ermitteln, um etwaige zeitliche Aenderungen derselben ihrem Betrage nach bestimmen und sie bei der Reduction der Beobachtungen in Berücksichtigung ziehen zu können. Eine grössere Genauigkeit der einzelnen Werthe wird man bei Bestimmung der Neigung und der Collimation nur in geringem Grade bewirken können und auch weniger Veranlassung dazu haben, da dieselben unter Anwendung der gewöhnlichen Methoden bereits mit ziemlicher Sicherheit ermittelt werden; dagegen wird man besonders Augenmerk darauf verwenden müssen, die Sicherheit der Bestimmung des Azimuths zu erhöhen, da dieser Instrumentalfehler nach Maassgabe der Zahlwerthe auf S. 63 aus der Combination von Pol- und Zeitsterndurchgängen nur mit geringerem Grade der Sicherheit erlangt werden kann. Am bequemsten wird man eine solche Vermehrung der Genauigkeit durch wiederholte Einstellungen auf eine Mire oder einen Collimator erlangen, wenn man dafür Sorge trägt, dass durch anderweitige Beobachtung von Polsterndurchgängen das absolute Azimuth dieser Mire scharf ermittelt wird.

Oftmals sind bei Aufstellung des Beobachtungsschema noch mannichfache andere Rücksichten zu nehmen; es wird z. B. von der Zeitdauer, innerhalb welcher die Leitung den Beobachtern zur Disposition steht, abhängen, ob man im Laufe eines Abendes nur ein Mal oder mehrere Male den Signalwechsel vornehmen kann. Ferner empfiehlt es sich im speciellen Falle des Hin- und Herregistrirens bei der Auswahl der Sterne auf die Längendifferenz selbst Rücksicht zu nehmen, da es nach der früheren Discussion über die Correction wegen des Gang-

unterschiedes der Relais vortheilhaft erschien, immer nur eine Station arbeiten zu lassen; wiewohl oben bereits die Mittel angegeben wurden, wie man auch bei gleichzeitigem Arbeiten beider Stationen diese Correctionen ermitteln und die Beobachtungsresultate vom Einfluss dieser Fehlerursache befreien kann.

Wegen der verschiedenen Bedingungen, welche bei den einzelnen Methoden der telegraphischen Längenbestimmung erfüllt sein müssen, kann man allgemein gültige Beobachtungsschemata nicht aufstellen; beispielsweise möge jedoch für das Verfahren der localen astronomischen Beobachtung verbunden mit Signalwechsel, welches insbesondere bei grösserer Entfernung der Stationen am meisten in Anwendung gebracht wird, ein Schema aufgeführt werden, welches ziemlich allen Erfordernissen Genüge leisten wird.

Nivellirung bei Obj. Nord und Obj. Süd in horizontaler Lage des Fernrohrs. Beobachtung der Mire. { Polstern I. 1. Hälfte der Fäden. . . . . Umlegung. Polstern I. 2. Hälfte der Fäden. } Beobachtung der Mire. Nivellirung bei Obj. Nord und Obj. Süd.
Zeitstern: 1—5. . . . . Umlegung. Zeitstern: 6—10.
Nivellirung bei Obj. Nord und Obj. Süd. Beobachtung der Mire. { Polstern II. 1. Hälfte der Fäden. . . . . Umlegung. Polstern II. 2. Hälfte der Fäden. } Beobachtung der Mire. Nivellirung bei Obj. Nord und Obj. Süd.
Signalwechsel und Correspondenz
Nivellirung bei Obj. Nord und Obj. Süd. Beobachtung der Mire. { Polstern III. 1. Hälfte der Fäden. . . . . Umlegung. Polstern III. 2. Hälfte der Fäden. } Beobachtung der Mire. Nivellirung bei Obj. Nord und Obj. Süd.
Zeitstern: 11—15. . . . . Umlegung. Zeitstern: 16—20.
Nivellirung bei Obj. Nord und Obj. Süd. Beobachtung der Mire. { Polstern IV. 1. Hälfte der Fäden. . . . . Umlegung. Polstern IV. 2. Hälfte der Fäden. } Beobachtung der Mire. Nivellirung bei Obj. Nord und Obj. Süd.

Jedenfalls ist es gerathen, an beiden Stationen dieselben Sterne zu beobachten, weil alsdann kleine Fehler in den angenommenen Werthen der Rectascensionen keinen nachtheiligen Einfluss auf das Resultat der Längendifferenz ausüben.

Zum Schluss soll noch eine kurze Betrachtung über den Genauigkeitsgrad dieser Längendifferenzen hinzugefügt werden.

Was zunächst den wahrscheinlichen Fehler der Längendifferenz aus einem an beiden Stationen beobachteten Stern in Bezug auf das Gesammtresultat eines Abendes betrifft, so kann man denselben für die Breite von Mitteleuropa und für Sterne etwas nördlich vom Aequator unmittelbar aus den Zahlwerthen der Tabelle auf Seite 66 ableiten, indem man den daselbst gegeben Gesammtfehler der Durchgangszeit eines Sternes mit $\sqrt{2}$ multiplicirt.[1] Im Folgenden sind diese wahrscheinlichen Fehler für einige specielle Werthe der Vergrösserung und der Fädenzahl berechnet:

Zahl der Fäden.	Aug- und Ohrmethode.			Registrirmethode.		
	Vergrösserung.			Vergrösserung.		
	40	80	200	40	80	200
7	0ˢ091	0ˢ082	0ˢ079	0ˢ081	0ˢ071	0ˢ068
9	0.086	0.079	0.078	0.076	0.069	0.066
11	0.083	0.078	0.076	0.074	0.068	0.066
15	0.079	0.075	0.075	0.071	0.066	0.065
25	0.076	0.074	0.072	0.068	0.065	0.064

Um wenigstens einen angenäherten Maassstab zu erhalten, in welcher Weise diese theoretischen Werthe mit den Ergebnissen der Praxis übereinstimmen, sind die wahrscheinlichen Fehler der Längendifferenz aus einem Stern innerhalb der Beobachtungen eines Abendes aus bereits vorhandenen Längenbestimmungen speciell für Sterne von ca. -10^0 bis $+30^0$ Declination ermittelt worden: es haben sich hierfür folgende Werthe ergeben:

Längenbestimmung.	*W. F.* der Längendifferenz aus einem Stern.	Mittlere Vergrösserung.	Zahl der Fäden.
	Aug- und Ohrmethode.		
Berlin — Leipzig .	±0ˢ086	108	8
Leipzig — Gotha .	±0.080	115	9
Berlin — Wien . .	±0.079	90	7
	Registrirmethode.		
Berlin — Leipzig .	±0ˢ059	108	12
Leipzig — Gotha .	±0.058	115	23
Berlin — Wien . .	±0.084	90	11

1 Hierbei ist die Fehlercomponente, welche der Unsicherheit der Uhrvergleichung entspricht, vernachlässigt worden, weil die Erfahrungen der bisherigen Längenbestimmungen darauf hindeuten, dass innerhalb der Beobachtungen eines Abendes erhebliche Fehler der Uhrvergleichung nicht eintreten, während dieselben allerdings zu weit grösserem Betrage anwachsen, wenn man die Ergebnisse verschiedener Tage mit einander vergleicht.

Die Mittel sind:

	W. F.	Vergrösserung	Zahl d. Fäden
Aug- und Ohrmethode:	± 0.082	104	8
Registrirmethode:	± 0.067	104	15

welche Werthe bis auf wenige Tausendel-Secunden mit den entsprechenden Werthen der obigen Tabelle übereinstimmen.

Dividirt man diese Werthe der obigen Tabelle durch die Wurzel aus der Anzahl der Sterne, welche während eines Abendes beobachtet sind, so erhält man den inneren wahrscheinlichen Fehler eines Tagesmittels für die Längendifferenz, welcher für ca. 16 bis 24 Sterne und für Mittelwerthe der Vergrösserung und der Fädenzahl ca. 0.01 bis 0.02 betragen wird. Dagegen kann man den wahrscheinlichen Fehler des Endresultats nicht auf die Weise ableiten, dass man den obigen wahrscheinlichen Fehler eines Tagesmittels durch die Wurzel aus der Anzahl der Beobachtungstage dividirt; man wird vielmehr berücksichtigen müssen, dass in diesem Falle zu dem so erlangten wahrscheinlichen Fehler, der wesentlich aus den Beobachtungsfehlern der Fadendurchgänge, der ungenauen Kenntniss der Instrumentalcorrectionen und der wahrscheinlichen Unsicherheit der persönlichen Gleichung beim Uebergang von Stern zu Stern zusammengesetzt ist, noch weitere Fehlerquellen hinzutreten, welche den Genauigkeitsgrad des Endresultates erheblich beeinträchtigen. Das vorhandene Beobachtungsmaterial ist kaum ausreichend über die Natur und Grösse der anderweit hinzutretenden Fehlerursachen einigermaassen sicheren Aufschluss zu erhalten; doch dürfte wohl eine der Hauptfehlerquellen in dieser Beziehung in der Unsicherheit der Bestimmung der Uhrdifferenz mit Hülfe der electrischen Signale zu suchen sein, welche besonders dann erheblich sein wird, wenn man nicht besondere Vorkehrungen trifft, immer nur Ströme von gleicher Intensität auf die Receptivapparate einwirken zu lassen. Wenn man jedoch diese Vorsichtsmassregel gehörig beobachtet, so wird man auch erwarten können, dass der wirkliche wahrscheinliche Fehler der Längendifferenz, abgeleitet aus der Uebereinstimmung der Tagesmittel untereinander, bereits im Mittel aus wenigen Beobachtungstagen ± 0.02 nicht überschreitet.

ANHANG.

Tafel

zur

Berechnung der Fadenintervalle für Polsterne

und zur

Bestimmung der Aequatorialfadendistanzen aus Polsterndurchgängen.

Bezeichnet: F die Aequatorialfadendistanz,
f das Fadenintervall im Parallel des Polsternes,
beide ausgedrückt in Zeitsecunden,
δ die Declination des Sternes,

so ist:

$$\log f^s = \log F^s + \log \sec \delta + k$$
$$\log F^s = \log f^s + \log \cos \delta - k$$

wo k im ersten Falle mit dem Argument: $\log F^s + \log \sec \delta$
im zweiten Falle mit dem Argument: f^s
der Tafel zu entnehmen ist.

k ist in Einheiten der VI. Decimale gegeben und bezeichnet den Ausdruck:

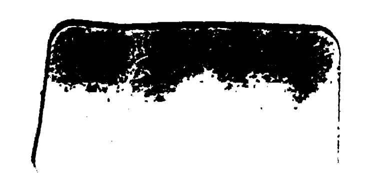
$$k = \log x - \log \sin x = M \left\{ \frac{\sin^2 x}{6} + \frac{11 \sin^4 x}{180} + \frac{191 \sin^6 x}{5670} + \ldots \right\}$$

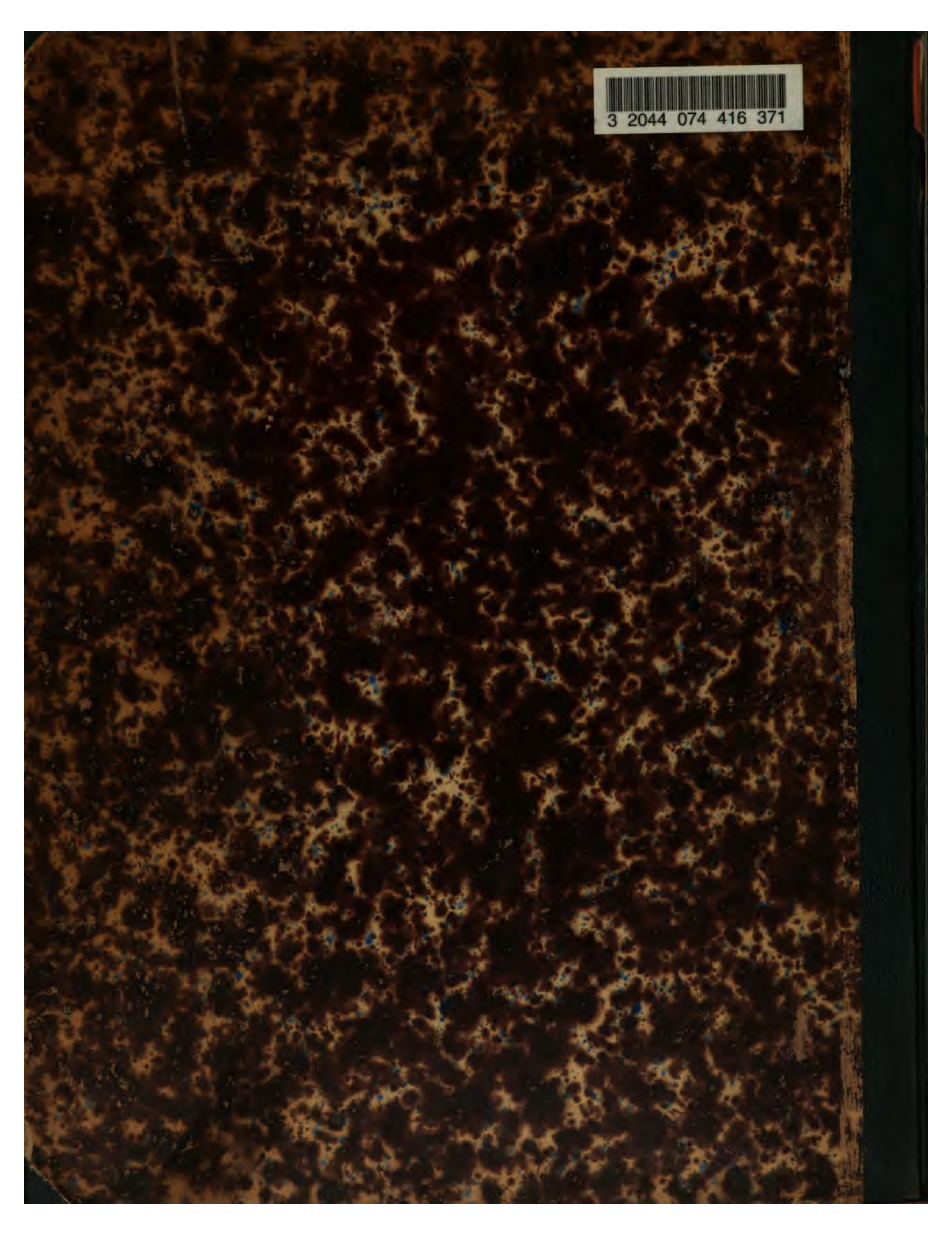
Vergl. pag. 40.

log F sec δ	k	f	log F sec δ	k	f	log F sec δ	k	f	log F sec δ	k	f
1.00	0	$0^m 10^s$	2.400	24	$4^m 11^s$	2.700	96	$8^m 21^s$	2.800	153	$10^m 31^s$
10	0	0 13	10	25	4 17	02	97	8 24	02	154	10 34
20	0	0 16	20	26	4 23	04	98	8 26	04	155	10 37
30	0	0 20	30	28	4 29	06	99	8 28	06	157	10 40
40	0	0 25	40	29	4 35	08	100	8 31	08	158	10 43
50	0	0 32	50	30	4 42	10	101	8 33	10	160	10 46
60	1	0 40	60	32	4 48	12	102	8 35	12	161	10 49
70	1	0 50	70	33	4 55	14	103	8 38	14	163	10 52
80	2	1 3	80	35	5 2	16	104	8 40	16	164	10 55
90	2	1 19	90	36	5 9	18	105	8 43	18	166	10 58
2.00	4	1 40	2.500	38	5 16	2.720	105	8 45	2.820	167	11 1
01	4	1 42	05	39	5 20	22	106	8 47	22	169	11 4
02	4	1 45	10	40	5 24	24	107	8 50	24	170	11 7
03	4	1 47	15	41	5 27	26	108	8 52	26	172	11 10
04	5	1 50	20	42	5 31	28	109	8 55	28	174	11 13
05	5	1 52	25	43	5 35	30	110	8 57	30	175	11 16
06	5	1 55	30	44	5 39	32	111	9 0	32	177	11 19
07	5	1 57	35	45	5 43	34	113	9 2	34	178	11 23
08	6	2 0	40	46	5 47	36	114	9 5	36	180	11 26
09	6	2 3	45	47	5 51	38	115	9 7	38	182	11 29
2.10	6	2 6	2.550	48	5 55	2.740	116	9 10	2.840	183	11 32
11	6	2 9	55	49	5 59	42	117	9 12	42	185	11 35
12	7	2 12	60	50	6 3	44	118	9 15	44	187	11 39
13	7	2 15	65	52	6 7	46	119	9 17	46	189	11 42
14	7	2 18	70	53	6 12	48	120	9 20	48	190	11 45
15	8	2 21	75	54	6 16	50	121	9 22	50	192	11 48
16	8	2 25	80	55	6 20	52	122	9 25	52	194	11 52
17	8	2 28	85	57	6 25	54	123	9 28	54	196	11 55
18	9	2 31	90	58	6 29	56	125	9 30	56	197	11 58
19	9	2 35	95	59	6 34	58	126	9 33	58	199	12 1
2.20	10	2 38	2.600	61	6 38	2.760	127	9 36	2.860	201	12 5
21	10	2 42	05	62	6 43	62	128	9 38	62	203	12 8
22	11	2 46	10	64	6 47	64	129	9 41	64	205	12 11
23	11	2 50	15	65	6 52	66	130	9 44	66	207	12 15
24	12	2 54	20	67	6 57	68	132	9 46	68	209	12 18
25	12	2 58	25	68	7 2	70	133	9 49	70	211	12 22
26	13	3 2	30	70	7 7	72	134	9 52	72	213	12 25
27	13	3 6	35	71	7 12	74	135	9 54	74	215	12 29
28	14	3 11	40	73	7 17	76	137	9 57	76	216	12 32
29	15	3 15	45	75	7 22	78	138	10 0	78	218	12 35
2.30	15	3 20	2.650	76	7 27	2.780	139	10 3	2.880	221	12 39
31	16	3 24	55	78	7 32	82	140	10 6	82	223	12 42
32	17	3 29	60	80	7 37	84	142	10 8	84	225	12 46
33	17	3 34	65	82	7 42	86	143	10 11	86	227	12 50
34	18	3 39	70	84	7 48	88	144	10 14	88	229	12 53
35	19	3 44	75	86	7 53	90	146	10 17	90	231	12 57
36	20	3 49	80	88	7 59	92	147	10 20	92	233	13 0
37	21	3 54	85	90	8 4	94	148	10 23	94	235	13 4
38	22	4 0	90	92	8 10	96	150	10 25	96	237	13 7
39	23	4 5	95	94	8 16	98	151	10 28	98	240	13 11
2.40	24	4 11	2.700	96	8 21	2.800	153	10 31	2.900	242	13 15

log F sec δ	k	f	log F sec δ	k	f	log F sec δ	k	f	log F sec δ	k	f
2.900	242	$13^m 15^s$	3.000	384	$16^m 41^s$	3.100	609	$21^m 1^s$	3.200	966	$26^m 28^s$
02	244	13 18	02	387	16 46	02	614	21 7	02	975	26 36
04	246	13 22	04	391	16 50	04	620	21 12	04	984	26 43
06	249	13 26	06	394	16 55	06	626	21 18	06	993	26 51
08	251	13 30	08	398	17 0	08	631	21 24	08	1003	26 58
10	253	13 33	10	402	17 4	10	637	21 30	10	1012	27 6
12	256	13 37	12	405	17 9	12	643	21 36	12	1021	27 13
14	258	13 41	14	409	17 14	14	649	21 42	14	1031	27 21
16	260	13 45	16	413	17 19	16	655	21 48	16	1041	27 28
18	263	13 48	18	417	17 23	18	661	21 54	18	1050	27 36
2.920	265	13 52	3.020	421	17 28	3.120	667	22 0	3.220	1060	27 44
22	268	13 56	22	425	17 33	22	674	22 6	22	1070	27 51
24	270	14 0	24	428	17 38	24	680	22 13	24	1080	27 59
26	273	14 4	26	432	17 43	26	686	22 19	26	1090	28 7
28	275	14 8	28	436	17 48	28	693	22 25	28	1100	28 15
30	278	14 12	30	440	17 53	30	699	22 31	30	1110	28 23
32	280	14 16	32	445	17 58	32	706	22 37	32	1121	28 30
34	283	14 20	34	449	18 3	34	712	22 44	34	1131	28 38
36	285	14 24	36	453	18 8	36	719	22 50	36	1142	28 46
38	288	14 28	38	457	18 13	38	725	22 56	38	1152	28 54
2.940	291	14 32	3.040	461	18 18	3.140	732	23 3	3.240	1163	29 2
42	294	14 36	42	466	18 23	42	739	23 9	42	1174	29 11
44	296	14 40	44	470	18 28	44	746	23 16	44	1185	29 19
46	299	14 44	46	474	18 33	46	753	23 22	46	1196	29 27
48	302	14 48	48	479	18 38	48	760	23 29	48	1207	29 35
50	305	14 52	50	483	18 43	50	767	23 35	50	1218	29 43
52	307	14 56	52	488	18 48	52	774	23 42	52	1229	29 52
54	310	15 0	54	492	18 54	54	781	23 48	54	1241	30 0
56	313	15 4	56	497	18 59	56	788	23 55	56	1252	30 8
58	316	15 8	58	501	19 4	58	796	24 1	58	1264	30 17
2.960	319	15 13	3.060	506	19 9	3.160	803	24 8	3.260	1276	30 25
62	322	15 17	62	511	19 15	62	810	24 15	62	1288	30 34
64	325	15 21	64	515	19 20	64	818	24 22	64	1300	30 42
66	328	15 25	66	520	19 26	66	826	24 28	66	1312	30 51
68	331	15 30	68	525	19 31	68	833	24 35	68	1324	30 59
70	334	15 34	70	530	19 36	70	841	24 42	70	1336	31 8
72	337	15 38	72	535	19 42	72	849	24 49	72	1349	31 17
74	340	15 43	74	540	19 47	74	857	24 56	74	1361	31 25
76	343	15 47	76	545	19 53	76	865	25 3	76	1374	31 34
78	347	15 51	78	550	19 58	78	873	25 10	78	1387	31 43
2.980	350	15 56	3.080	555	20 4	3.180	881	25 17	3.280	1400	31 52
82	353	16 0	82	560	20 9	82	889	25 24	82	1413	32 0
84	356	16 5	84	565	20 15	84	897	25 31	84	1426	32 9
86	360	16 9	86	570	20 21	86	906	25 38	86	1439	32 18
88	363	16 14	88	576	20 26	88	914	25 45	88	1453	32 27
90	366	16 18	90	581	20 32	90	923	25 52	90	1466	32 36
92	370	16 23	92	586	20 38	92	931	25 59	92	1480	32 46
94	373	16 27	94	592	20 43	94	940	26 7	94	1494	32 55
96	377	16 32	96	597	20 49	96	949	26 14	96	1508	33 4
98	380	16 36	98	603	20 55	98	957	26 21	98	1522	33 13
3.000	384	16 41	3.100	609	21 1	3.200	966	26 28	3.300	1536	33 22

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.




3 2044 074 416 371